

# Ondelettes pour la simulation des écoulements fluides incompressibles

## Méthodes numériques par ondelettes

Erwan Deriaz [Erwan.Deriaz@imag.fr](mailto:Erwan.Deriaz@imag.fr)

Équipe Mosaic  
Laboratoire de Modélisation et Calcul  
Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble  
Directrice de thèse : **Valérie Perrier**

Canum

Guidel

31 mai 2006

# Décomposition en ondelettes de la solution de NS

- **Résolution numérique** des équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension 2 et 3 en adaptif :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} & t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ n=2 \text{ or } 3 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

- Discrétisation adaptative en ondelettes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n) \approx \mathbf{u}_N(\mathbf{x}, t^n) = \sum_{\alpha \in A_n} c_\alpha^n \Psi_\alpha(\mathbf{x})$$

avec  $\operatorname{Card}(A_n) = N$  et  $\Psi_\alpha \in \mathbf{H}_{\operatorname{div},0} = \{\mathbf{u} \in L^2 / \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0\}$ .

# Ondelettes à divergence nulle pour le calcul scientifique

- Théorie des ondelettes
  - P.G. Lemarié-Rieusset, *“Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle”*, 1992.
  - P.G. Lemarié-Rieusset, *“Un théorème d’inexistence pour les ondelettes vecteurs à divergence nulle”*, 1994.

# Ondelettes à divergence nulle pour le calcul scientifique

- Théorie des ondelettes
  - P.G. Lemarié-Rieusset, *“Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle”*, 1992.
  - P.G. Lemarié-Rieusset, *“Un théorème d’inexistence pour les ondelettes vecteurs à divergence nulle”*, 1994.
- Résolutions numériques par ondelettes
  - W. Dahmen, A. Kunoth and K. Urban, *“A wavelet-Galerkin method for the Stokes problem”*, 1996.
  - K. Urban, *“Wavelet Bases in  $H(\text{div})$  and  $H(\text{curl})$ ”*, 2000.
  - C. Albukrek, K. Urban, D. Rempfer, and J. Lumley, *“Divergence-Free Wavelet Analysis of Turbulent Flows”*, 2002.

# Plan de l'exposé

- 1 Ondelettes à divergence nulle et gradient
  - Construction
  - Algorithmes rapides
- 2 Décomposition de Helmholtz par ondelettes
  - Principe
  - Algorithme
- 3 Navier-Stokes incompressible par ondelettes
  - Le schéma numérique
  - Test sur les trois tourbillons

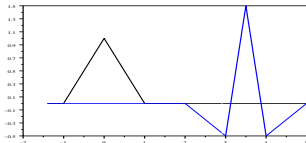
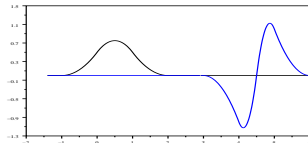
# Plan

- 1 **Ondelettes à divergence nulle et gradient**
  - Construction
  - Algorithmes rapides
- 2 Décomposition de Helmholtz par ondelettes
  - Principe
  - Algorithme
- 3 Navier-Stokes incompressible par ondelettes
  - Le schéma numérique
  - Test sur les trois tourbillons

# Lemme fondamental sur la dérivation d'AMR

**Proposition (Malgouyres):** [Lem92] Soit  $(\varphi_1, \psi_1)$  une AMR. Si  $\varphi_1 \in C^{1+\epsilon}$  pour un  $\epsilon > 0$ , alors il existe une AMR  $(\varphi_0, \psi_0)$  telle que :

$$\varphi_1'(x) = \varphi_0(x) - \varphi_0(x-1) \quad , \quad \psi_1'(x) = 4\psi_0(x)$$

 $\varphi_0$  $\psi_0$  $\varphi_1$  $\psi_1$ 

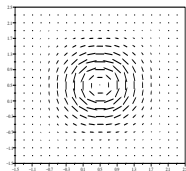
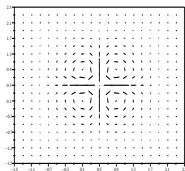
**Notation :**  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k)$

## Ondelettes anisotropes à divergence nulle 2D

- Ondelettes à divergence nulle :

$$\Psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{vmatrix} 2^{j_2} \psi_1(2^{j_1} \mathbf{x}_1 - \mathbf{k}_1) \psi_0(2^{j_2} \mathbf{x}_2 - \mathbf{k}_2) \\ -2^{j_1} \psi_0(2^{j_1} \mathbf{x}_1 - \mathbf{k}_1) \psi_1(2^{j_2} \mathbf{x}_2 - \mathbf{k}_2) \end{vmatrix}$$

avec  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$  l'échelle et  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  la position.

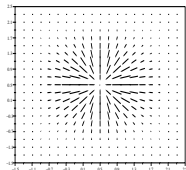
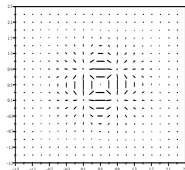

 $\phi^{\text{div}}$ 

 $\psi^{\text{div}}$



# Ondelettes anisotropes à divergence nulle 2D

- Ondelettes gradient :

$$\Psi_{j,k}^{\text{rot}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2^j \psi_0(2^j x_1 - k_1) \psi_1(2^j x_2 - k_2) \\ 2^j \psi_1(2^j x_1 - k_1) \psi_0(2^j x_2 - k_2) \end{cases}$$


 $\phi^{\text{rot}}$ 

 $\psi^{\text{rot}}$

# Plan

- 1 **Ondelettes à divergence nulle et gradient**
  - Construction
  - **Algorithmes rapides**
- 2 Décomposition de Helmholtz par ondelettes
  - Principe
  - Algorithme
- 3 Navier-Stokes incompressible par ondelettes
  - Le schéma numérique
  - Test sur les trois tourbillons

# Algorithmes rapides

## Cas 2D : Base standard

$$\Psi_{1,j,k}(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi_1(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi_0(2^{j_2} x_2 - k_2) \\ 0 \end{cases}$$

$$\Psi_{2,j,k}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 \\ \psi_0(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi_1(2^{j_2} x_2 - k_2) \end{cases}$$

changée en

$$\Psi_{j,k}^{\text{div}} = 2^{j_2} \Psi_{1,j,k} - 2^{j_1} \Psi_{2,j,k} \quad \text{et} \quad \Psi_{j,k}^{\text{n}} = 2^{j_1} \Psi_{1,j,k} + 2^{j_2} \Psi_{2,j,k}$$

# Calcul des coefficients

Opération sur les coefficients, pour un couple  $\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  :

$$\begin{bmatrix} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \\ d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{n}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2^{2j_1} + 2^{2j_2}} \begin{bmatrix} 2^{j_2} & -2^{j_1} \\ 2^{j_1} & 2^{j_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,\mathbf{j},\mathbf{k}} \\ d_{2,\mathbf{j},\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (*)$$

Matrice de changement de base orthogonale.

$$\left. \begin{array}{l} \text{transformée standard} \\ u_1 \longrightarrow \\ u_2 \longrightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} d_{1,\mathbf{j},\mathbf{k}} \\ d_{2,\mathbf{j},\mathbf{k}} \end{array} \xrightarrow{\text{opération } (*)} \begin{array}{l} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \\ d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{n}} \end{array}$$

# Plan

- 1 Ondelettes à divergence nulle et gradient
  - Construction
  - Algorithmes rapides
- 2 **Décomposition de Helmholtz par ondelettes**
  - **Principe**
  - Algorithme
- 3 Navier-Stokes incompressible par ondelettes
  - Le schéma numérique
  - Test sur les trois tourbillons

## Principe de la décomposition de Helmholtz

**Décomposition :**  $(L^2(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{H}_{\text{div } 0}(\mathbb{R}^n) \oplus^\perp \mathbf{H}_{\text{rot } 0}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{div}} + \mathbf{u}_{\text{rot}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_{\text{div}} = \mathbf{rot} \psi, \quad \mathbf{u}_{\text{rot}} = \nabla p$$

**Notation :** pour  $\mathbf{u} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ ,  $\mathbf{u} = \mathbb{P}\mathbf{u} + \mathbb{Q}\mathbf{u}$

Navier-Stokes :  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \in \mathbf{H}_{\text{div } 0}(\mathbb{R}^n)$ .

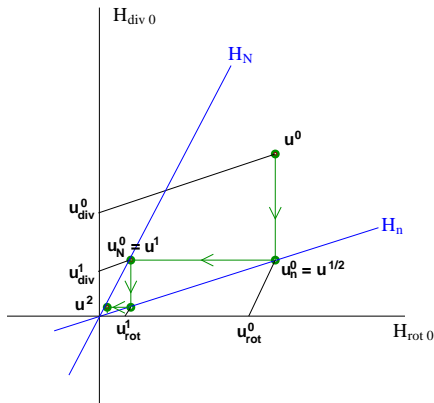
**Problème :** les projecteurs sur les bases d'ondelettes à divergence nulle et sur les bases d'ondelettes gradient sont des projecteurs *biorthogonaux*.

→ Méthode itérative pour trouver  $\mathbf{u}_{\text{div}}$  et  $\mathbf{u}_{\text{rot}}$ .

# Plan

- 1 Ondelettes à divergence nulle et gradient
  - Construction
  - Algorithmes rapides
- 2 **Décomposition de Helmholtz par ondelettes**
  - Principe
  - **Algorithme**
- 3 Navier-Stokes incompressible par ondelettes
  - Le schéma numérique
  - Test sur les trois tourbillons

# Construction des suites $\mathbf{u}_{\text{div}}^\rho$ et $\mathbf{u}_{\text{rot}}^\rho$



$$\mathbf{H}_n = \text{vect}\{\Psi_{j,k}^n\}, \quad \mathbf{H}_N = \text{vect}\{\Psi_{j,k}^N\}.$$



## Construction des suites $\mathbf{u}_{\text{div}}^\rho$ et $\mathbf{u}_{\text{rot}}^\rho$

Sommes directes :

$$(L^2(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{H}_{\text{div},0} \oplus \mathbf{H}_n, \quad (L^2(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{H}_N \oplus \mathbf{H}_{\text{rot},0}$$

En ondelettes :

$$\mathbf{u} = P_{\text{div}} \mathbf{u} + Q_n \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = P_N \mathbf{u} + Q_{\text{rot}} \mathbf{u}$$

$$\text{Suite : } \mathbf{u}^\rho = \underbrace{P_{\text{div}} \mathbf{u}^\rho}_{\mathbf{u}_{\text{div}}^\rho} + \underbrace{Q_{\text{rot}} Q_n \mathbf{u}^\rho}_{\mathbf{u}_{\text{rot}}^\rho} + \underbrace{P_N Q_n \mathbf{u}^\rho}_{\mathbf{u}^{\rho+1}}$$

Finalement :

$$\mathbf{u}_{\text{div}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbf{u}_{\text{div}}^p, \quad \mathbf{u}_{\text{rot}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbf{u}_{\text{rot}}^p$$

# Plan

- 1 Ondelettes à divergence nulle et gradient
  - Construction
  - Algorithmes rapides
- 2 Décomposition de Helmholtz par ondelettes
  - Principe
  - Algorithme
- 3 **Navier-Stokes incompressible par ondelettes**
  - **Le schéma numérique**
  - Test sur les trois tourbillons

# Schéma numérique Navier-Stokes

Schéma semi-implicite en temps :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \delta t \mathbb{P} [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^n + \delta t \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1}$$

sur les coefficients d'ondelettes :

$$(Id - \nu \delta t \Delta) d_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},n+1} = d_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},n} - \delta t d_{j,\mathbf{k}}^{\text{div}} (\mathbb{P} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}])$$

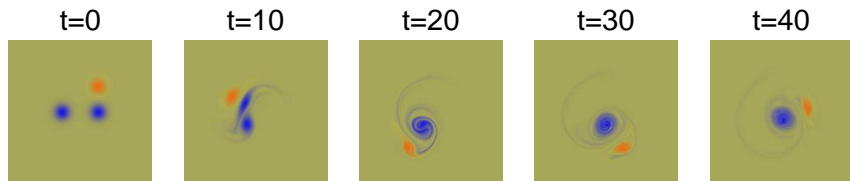
En utilisant :

- La décomposition de Helmholtz par ondelettes
- Un préconditionneur en ondelettes pour le Laplacien implicite

# Plan

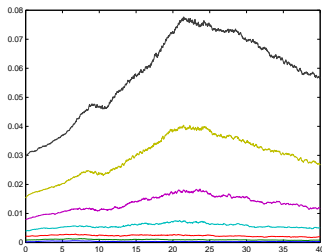
- 1 Ondelettes à divergence nulle et gradient
  - Construction
  - Algorithmes rapides
- 2 Décomposition de Helmholtz par ondelettes
  - Principe
  - Algorithme
- 3 **Navier-Stokes incompressible par ondelettes**
  - Le schéma numérique
  - **Test sur les trois tourbillons**

## Test avec la simulation “fusion des 3 tourbillons”



- code ondelettes splines de degré 1 et 2 les plus simples
- schéma semi-implicite d'ordre 2 pour l'évolution temporelle
- grille  $256^2$ ,  $\delta t = 0.02$  et  $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$
- 7 itérations pour Helmholtz, 3 pour le laplacien implicite,
- Code utilisant **uniquement** des transformées en ondelettes

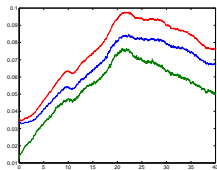
## Coefficients d'ondelettes



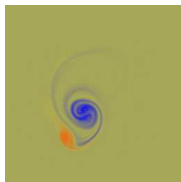
Part de coefficients d'ondelettes dépassant les seuils :  
 $\varepsilon/4$ ,  $\varepsilon/16$ ,  $\varepsilon/64$ ,  $\varepsilon/256$ ,  $\varepsilon/1024$ ,  $\varepsilon/4096$ ,  $\varepsilon/16384$   
 avec  $\varepsilon = \sup(d_{t_0})$

# Pseudo-adaptatif

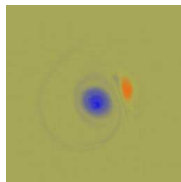
nb de coeff activés



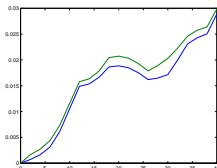
t=20



t=40

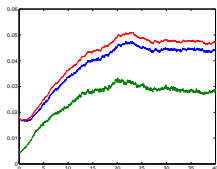
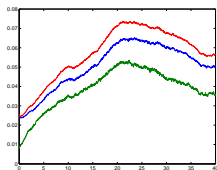


erreur relative

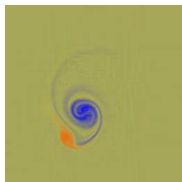


# Effet de l'anisotropie

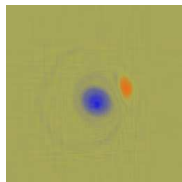
nb de coeff activés



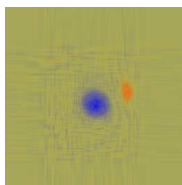
t=20



t=40



seuil élevé





# Conclusion

## Atouts

- Calculs en  $O(n)$
- Séparation des échelles
- Estimation de la régularité locale

## Perspectives

- Passage à l'adaptatif
- Conditions aux bords
- Équations de Maxwell