Convergence d'un schéma numérique de type 'sweeping process' pour un problème de vibro-impact

Raoul Dzonou[1] Manuel Monteiro[2] Laetitia Paoli[1]

[1]Departement de mathématique
Université Jean Monnet

[2]CMAF
Université de Lisbonne

Congres Nationale d'analyse numérique, 29 mai 2006

tu-logo

ur-logo

Outline

tu-logo

ur-logo

Outline

1. Formulation du problème et algorithme de 'sweeping process'
2. Résultat de convergence
3. Idées de la preuve
4. Propriétés de la fonction limite
5. Problème modèle
6. Homme fort

tu-logo

ur-logo

Outline

1. Formulation du problème et algorithme de 'sweeping process'
1. Résultat de convergence
1. Idées de la preuve
1. Propriétés de la fonction limite
1. Problème modèle
1. Homme fort

tu-logo

ur-logo

Outline

tu-logo

ur-logo

Outline

tu-logo

ur-logo

Outline

1. Formulation du problème et algorithme de 'sweeping process'
1. Résultat de convergence
1. Idées de la preuve
1. Propriétés de la fonction limite
1. Problème modèle
1. Homme fort

tu-logo

ur-logo

Considérons un système mécanique ayant un nombre fini d de degrés de liberté, la position est définie par $q : I = [0, \tau] \to E := \mathbb{R}^d$.

- Le système est soumis à une contrainte unilatérale

$$q(t) \in L = \{q \in E;\ g(q) \leq 0\} \quad \forall t \in I.$$

- Nous décrivons la dynamique du système impactant par:

$$M(q)\ddot{q} = \mu + f(., q, p) \quad p = M(q)\dot{q}.$$

$$supp(\mu) \subseteq \{t \in I : g(q(t)) = 0\};$$

$$-\mu \in N_L(q) = \begin{cases} \{\lambda \bigtriangledown g(q)\ \lambda \geq 0\} \text{ si } q \in \partial L, \\ \{0_E\} \text{ si } q \in IntL \\ \emptyset \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

- Lorsque $g(q(t)) = 0$, la loi d'impact est définie par:

$$\dot{q}(t+0) = -e\dot{q}(t-0) + (1+e)proj_{q(t)}(\dot{q}(t-0), V(q(t))), \quad e \in [0, 1]$$

Problème (P)

Etant donné $(q_0, u_0) \in L \times V(q_0)$, on cherche $u : [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ à variations bornées telle que:

$$f(t, q, M(q)u)dt - M(q)du \in \partial I_{V(q(t))}\left(\frac{u^+(t) + eu^-(t)}{1+e}\right)$$

avec

$$q(t) = q_0 + \int_0^t u(s)ds,$$

$$V(q) = \begin{cases} \{v \in E : \nabla g(q).v \leq 0\} & \text{si} \quad g(q) \geq 0 \\ E \quad \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\partial I_{V(q)}(y) = \begin{cases} \{x \in E; < x, z - y > \leq 0 \quad \forall z \in V(q)\} \text{ si } y \in V(q), \\ \emptyset \quad \text{sinon}. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = \frac{T}{n}$; soit $(t_{n,i} = i * h)_{i=0}^{n}$; on construit les suites $(q_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ et $(u_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ de points de E par:

$$\begin{cases} q_{n,0} = q_0; \\ u_{n,0} = -eu_0 + (1+e)proj_{q_0}(u_0, V(q_0)) = u_0; \\ \text{pour } 0 \leq i \leq n-1 \\ q_{n,i+1} = q_{n,i} + hu_{n,i}; \\ u_{n,i+1} = -eu_{n,i} + (1+e)proj_{q_{n,i+1}}(u_{n,i} + \frac{h}{1+e} M^{-1}_{n,i+1} f_{n,i+1}, V(q_{n,i+1})) \end{cases}$$

où $f_{n,i+1} = f(t_{n,i+1}, q_{n,i+1}, M(q_{n,i+1})u_{n,j(i)})$.
$j(i) = i$ si on utilise une version explicite du schéma et $j(i) = i + 1$ si on utilise une version implicite.

tu-logo

ur-logo

Sous les hypothèses:

- $f : I \times E \times E \to E$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à ces deuxième et troisième variables.
- L' application $q \mapsto M(q)$ est de classe C^1 de E sur l'ensemble des matrices symétriques et définies positives (s.d.p) que l'on notera $\mathbb{M}_{n,s.d.p}$,
- $g : E \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^{1,1/2}(E;\mathbb{R})$ et dont le gradient ne s'annule pas sur un voisinage du bord de L.

Théorème (Résultat de convergence locale)

Pour tout $(q_0, u_0) \in L \times V(q_0)$ il existe un intervalle $[0, \tau^*],\ \tau^* > 0$ sur lequel le schéma converge vers une fonction.

- Estimation a priori des vitesses discrètes: soit $\tilde{\tau} \in (0, \tau]$ et $\tilde{n} = E(\frac{\tilde{\tau}}{h})$. On considère les applications:

$$G : \begin{cases} (E \times E)^{\tilde{n}+1} \to E^{\tilde{n}} \\ \{(\tilde{q}_{n,i}, \tilde{u}_{n,i})\}_{0 \leq i \leq \tilde{n}} \mapsto \{g_{n,i}\}_{1 \leq i \leq \tilde{n}}; \\ g_{n,i+1} = f(t_{n,i+1}, \tilde{q}_{n,i+1}, M(\tilde{q}_{n,i+1})\tilde{u}_{n,j(i)})_{0 \leq i \leq \tilde{n}}; \end{cases}$$

$$F : \begin{cases} E^{\tilde{n}} \to (E \times E)^{\tilde{n}+1} \\ \{g_{n,i}\}_{1 \leq i \leq \tilde{n}} \mapsto \{(\tilde{q}_{n,i}, \tilde{u}_{n,i})\}_{0 \leq i \leq \tilde{n}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{q}_{n,0} = q_0, \\ \tilde{u}_{n,0} = u_0, \\ \tilde{q}_{n,i+1} = \tilde{q}_{n,i} + h\tilde{u}_{n,i}, \\ \tilde{x} = \tilde{u}_{n,i} + \frac{h}{1+e} M^{-1}_{n,i+1} g_{n,i+1} \\ \tilde{u}_{n,i+1} = -e\tilde{u}_{n,i} + (1+e) proj_{\tilde{q}_{n,i+1}}(\tilde{x}, V(q_{n,i+1})). \end{cases}$$

Soit $W = (\bar{B}(q_0, R\tau) \times \bar{B}(0, R))^{\tilde{n}+1}$, on a $F \circ G(W) \subset W$.

- Estimation des accélérations discrètes.

Lemme

Il existe $\tau^* \in (0, \tilde{\tau}]$ *et* $C > 0$ *indépendantes de n telle que:*

$$\sum_{i=0}^{[\tau^*/h]-1} |u_{n,i+1} - u_{n,i}| \leq C$$

- On construit les solutions approchées (q_n, u_n).

On peut extraire une sous-suite que l'on notera encore $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que: $u_n \to v$ simplement sur $[0, \tau^*]$(*Helly*). On pose $u(t) = \frac{v^+(t)+ev^-(t)}{1+e}$, et $q(t) = q_0 + \int_0^t u(s)ds \quad t \in [0, \tau^*]$ on a $q_n \to q \qquad (\text{Ascoli} - \text{Arzella})$

Lemme

Pour tout t dans I^* on a:

$$g(q(t)) \leq 0.$$

Soit $d\mu = |du| + dt$ une mesure positive, on note par t'_μ et u'_μ les densités de dt et $|du|$ par rapport $d\mu$.L'inclusion différentielle se ramène à:

$$f(t,q,p)t'_\mu - M(q)u'_\mu \in \partial I_{V(q)}\left(\frac{u(t+0)+eu(t-0)}{1+e}\right).\ d\mu\ pp$$

Proposition

Soit J l'ensemble des points de continuité de u alors

$$f(t,q,p)t'_\mu - M(q)u'_\mu \in \partial I_{V(q)}(u(t)).\ d\mu\ pp \text{ sur } \quad J$$

On montre tout d'abord que:

Lemme (Inégalité variationnelle)

Soit $0 \le s \le t < \tau^*$ et supposons que $z \in V(y)$ pour tout y dans un voisinage de $q([s,t])$. Alors:

$$\int_s^t [f(\tau,q,p).(z-v) + (\frac{dM}{dq}v)v.(z-\frac{1}{2}v)]d\tau \le (M(q(t))v(t) - M(q(s))v(s)).z - \frac{1}{2}(|v(t)|^2_{q(t)} - |v(s)|^2_{q(s)})$$

On utilise le théorème de Jeffery pour obtenir le résultat.

Lemme

Sur $I^* - J$ L' inclusion différentielle se ramène à

$$v(t+0) = -ev(t-0) + (1+e)proj_{q(t)}(v(t-0), V(q(t))).$$

On pose $\tilde{u} = \frac{v(t+0)+ev(t-0)}{1+e}$

- Pour n suffisament grand il existe i telle que $g(q_{n,i}) \geq 0$. On note i_0 le pemier indice qui vérifie $g(q_{n,i}) \geq 0$. On estime la distance entre $v(t-0)$ et $u_{n,i_0-1} + hM^{-1}_{n,i_0}\tilde{f}_{n,i_0}$;
- On utilise la continuité de l'opérateur de projection pour montrer que:
  étant donné $\varepsilon > 0$, alors $|\tilde{u} - u_{n,i_0}| < \varepsilon$, pour n suffisamment grand.
- Enfin on estime les variations des vitesses discrètes sous la forme d'un $0(\varepsilon)$ après la première projection.

Théorème (Estimations d'énergie)

Soit (q, u) une solution du problème (P) sur $I = [0, \tau]$; il existe $\tau(R) > 0$ tel que:

$$q(t) \in B(q_0, R\tau) \quad |u(t)|_{q(t)} \leq R \quad \forall t \in [0, min\{\tau, \tau(R)\}].$$

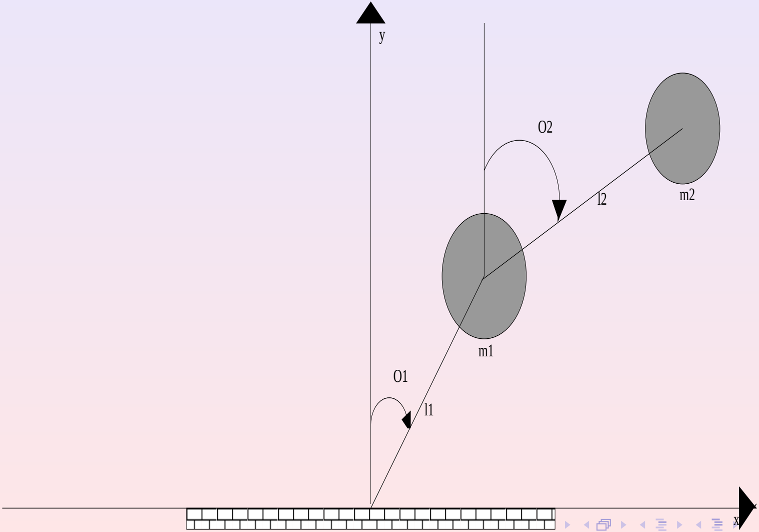
[Paoli-Schatzman 2002]

Théorème (Résultat de convergence globale)

Il existe (q, u) une solution du problème (P) obtenue via le schéma numérique sur $[0, \tau^*]$ telle que $\tau^* \geq \tau(R)$.

Idée de la preuve

$$\limsup_{h \to 0} \sup\{|u_{n,i}|_{q_{n,i}}; 0 \leq t_{n,i} \leq \tau^*\} \leq \text{ess sup}\{|u(t)|_{q(t)}; 0 \leq t \leq \tau^*\}.$$


y
O2
m2
l2
m1
O1
l1
x

On obtient

$$M(q)\ddot{q} = f(t,q,u),$$

avec

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 cos(\theta_1-\theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$f(t,q,u) = \begin{pmatrix} mgl_1 sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin(\theta_1-\theta_2) \\ m_2 g l_2 sin\theta_2 + m_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$$

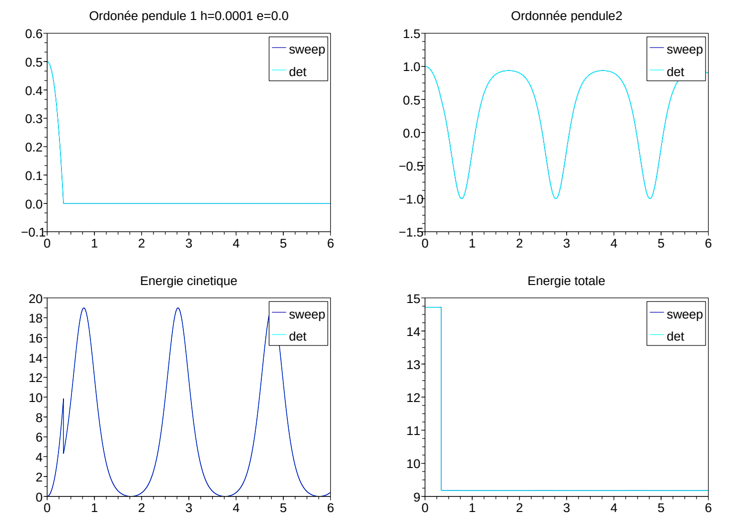
$m = m_1 + m_2$.

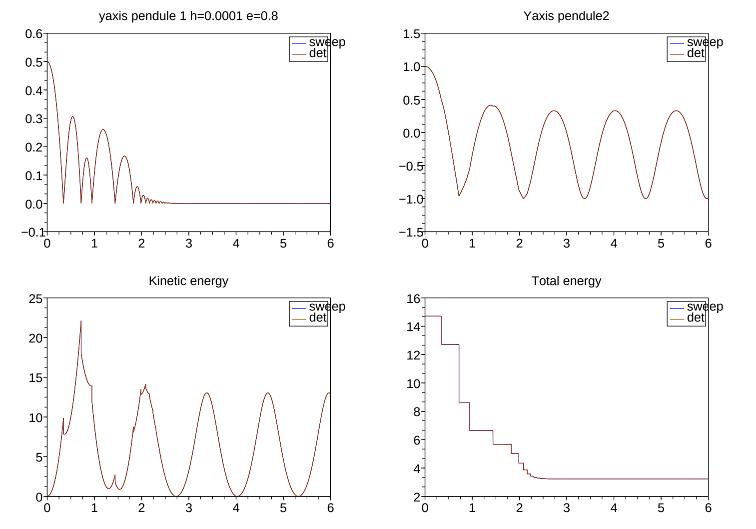
La contrainte unilatérale est exprimée par:

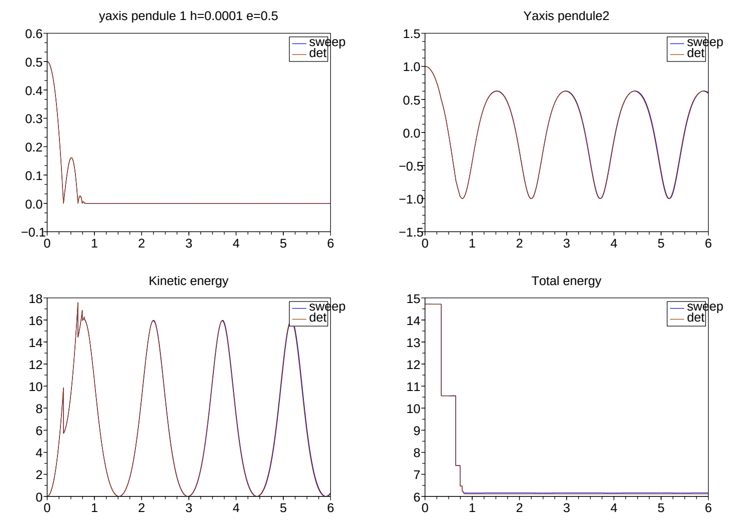
$$g(q) = -cos(\theta_1) \quad L = \{q = (\theta_1, \theta_2) \in R^2; g(q) \leq 0\}$$

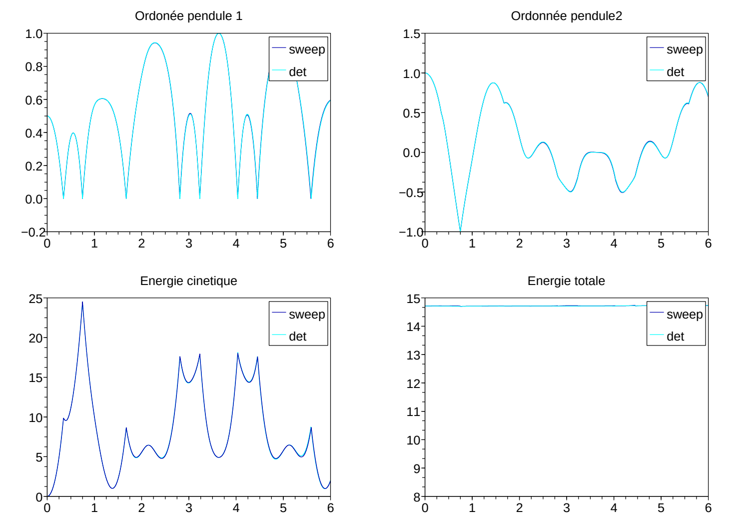
On utilise le schéma implicite et on considère

$q_0 = (\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}),\ u_0 = (0;0),\ m_1 = m_2 = 1;\ l_1 = l_2 = 1\ T = 6s$


Ordonée pendule 1 h=0.0001 e=0.0
Ordonnée pendule2
Energie cinetique
Energie totale
sweep
det


yaxis pendule 1 h=0.0001 e=0.8
sweep
det
Yaxis pendule2
sweep
det
Kinetic energy
sweep
det
Total energy
sweep
det


yaxis pendule 1 h=0.0001 e=0.5
Yaxis pendule2
Kinetic energy
Total energy
sweep
det


Ordonée pendule 1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0
1
2
3
4
5
6
sweep
det
Ordonnée pendule2
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
1
2
3
4
5
6
sweep
det
Energie cinetique
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
sweep
det
Energie totale
15
14
13
12
11
10
9
8
0
1
2
3
4
5
6
sweep
det

- Dire la vérité ne relève pas toujours du mystère c'est un choix.
- Un homme fort(selon la définition existante de Canum) ne sait pas faire des maths(du moins c mon avis).
- Quelles guaranties les noirs ont à faire de la recherche?
- Le silence n'est pas toujours un aveu

tu-logo

ur-logo

- R. Dzonou and M.Monteiro Marques, *Sweeping process for inelastic impact problem with a general inertia operator*. Submitted to European Journal of Mechanics A/Solids, 2005.
- M. Mabrouk, *A unified variational model for the dynamics of perfect unilateral constraints*. Eur. J. Mech. A/Solids, 17, 819-842, 1998.
- [Moreau 1988] J.J. Moreau, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, in Nonsmooth Mechanics and Applications*, J.J.Moreau and P.D.Panagiotopoulos eds, CISM courses and lectures, Springer-Verlag, New-York, 302 1-82, 1988.

- MANUEL D.P MONTEIRO MARQUES., *Differential inclusions in non-smooth mechanical problems: shocks and dry friction*. Birkhauser, Boston, Berlin, 1993.
- LAETITIA PAOLI AND M. SCHATZMAN, *Mouvement à nombre fini de dégrés de liberté avec contraintes unilatérales: cas avec perte d'énergie*. M2AN, 27(6), 673-717,1993.
- L. PAOLI AND M. SCHATZMAN, *A numerical scheme for impact problems I and II*. SIAM, J. Numer. Anal., 40-2, 702-733 and 734-768, 2002.

tu-logo

ur-logo