Schéma décentré pour l'équation level set en maillage non structuré

Malcom Djenno

Laboratoire de Mathématiques

Université Blaise Pascal

Clermont-Ferrand, France

31 Mai 2006

Plan de l'exposé

Equation de level set

- Soit $T > 0$. Etant donnés Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $F : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$,
  l'équation level set (voir [4]) s'écrit :
- Trouver $\Phi : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\partial_t \Phi(\boldsymbol{x}, t) + F(\boldsymbol{x}, t) \left| \nabla \Phi \right| (\boldsymbol{x}, t) = 0, \tag{1.1}$$

- Condition initiale au temps $t = 0$.

Conditions de bord si $\Omega \neq \mathbb{R}^2$

- Dirichlet
- Neumann

Equation d'Hamilton-Jacobi

En posant $H(\boldsymbol{x}, t, \nabla\Phi) = F(\boldsymbol{x}, t)\,|\nabla\Phi|$, on reécrit l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H(\boldsymbol{x}, t, \nabla\Phi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.2}$$

où $H(\boldsymbol{x}, t, \nabla\Phi)$ s'appelle l' Hamiltonien.

Solutions de viscosité

- $\|\Phi(., t) - \psi(., t)\| \leq \|\Phi_0(.) - \psi_0(.)\|$

Maillage

$B_i =$ centre du triangle K_i.
$S_{ij} =$ côté commun aux triangles K_i et K_j.
$\boldsymbol{\nu}_{ij} =$ normale au côté S_{ij} orientée de K_i vers K_j.

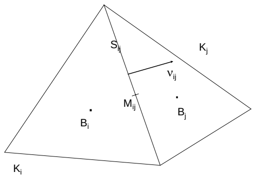


FIG.: Eléments du maillage

Maillage (suite)

$\Omega =$ domaine ouvert borné polygonal.
$\mathcal{T}_h =$ triangulation de Ω.
$N =$ nombre d'éléments.
$M =$ nombre de noeuds.
Si $j \in \nu(i)$ alors $K_j \cap K_i \neq \emptyset$.
Si $i \in \nu(k)$ alors K_i contient le point P_k.

Forme générale des schémas

On se donne ϕ_k^n, et on calcule ϕ_k^{n+1} par

$$\phi_k^{n+1} = \phi_k^n + \Delta t H_k(\boldsymbol{U}_1^n, .., \boldsymbol{U}_{|\nu(k)|}^n).$$

Le procédé de calcul de $\boldsymbol{U}_i^n, i \in \nu(k)$, sera précisé plus tard.

H_k est l'Hamiltonien numérique.

Consistance

Le schéma est dit consistant

$$\text{si } \phi_k^0 = b_0 + a_1 x_k + a_2 y_k \quad \forall (x_k, y_k) \text{ on a } \phi_k^n = \phi_k^0 - t^n H(\boldsymbol{a}).$$

Cette propriété est toujours réalisée si l'hamiltonien numérique vérifie $H_k(\boldsymbol{U}, .., \boldsymbol{U}) = H(\boldsymbol{U}) \quad \forall \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^2$.

Monotonie

Etant donnés ϕ_k^n,ψ_k^n, on calcule ϕ_k^{n+1} et ψ_k^{n+1} par

$$\phi_k^{n+1} = \phi_k^n + \Delta t H_k(\boldsymbol{U}_1^n, .., \boldsymbol{U}_{|\nu(k)|}^n),$$
$$\psi_k^{n+1} = \psi_k^n + \Delta t H_k(\boldsymbol{V}_1^n, .., \boldsymbol{V}_{|\nu(k)|}^n),$$

Le procédé de calcul de $\boldsymbol{U}_i^n$ et $\boldsymbol{V}_i^n$, $i \in \nu(k)$, sera précisé plus tard.

Le schéma est dit monotone si $\phi_k^n \geq \psi_k^n$ implique $\phi_k^{n+1} \geq \psi_k^{n+1}$.

Espaces d'approximation

$\mathcal{V}_h^0 = \{\lambda \in L^\infty(\Omega),\, \forall K_i \in \mathcal{T}_h \; \lambda_{|K_i} \in \mathbb{R}\}$, de base $1_{K_i}, i = 1, .., N$.
$\mathcal{V}_h^1 = \{\lambda$ continue sur Ω, $\forall K_i \in \mathcal{T}_h \; \lambda_{|K_i} \in \mathbb{P}^1\}$, de base $\lambda_k, k = 1, .., M$.

$\phi_k^n \approx \Phi(P_k, t^n)$, $\quad \phi_h^n = \sum_{k=1}^M \phi_k^n \lambda_k$ $(\phi_h^n \in \mathcal{V}_h^1)$.
$\boldsymbol{U}_i^n \approx \nabla \Phi_{|K_i}$, $\quad \boldsymbol{U}_h^n = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{U}_i^n 1_{K_i}$ $(\boldsymbol{U}_h^n \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^0)$.
$\boldsymbol{U}_k^n \approx \nabla \Phi(P_k, t^n)$.

Un schéma simple

Calcul de $\phi_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h^1$

$$\boldsymbol{U}_i^n = \nabla \phi^n_{h|K_i}, \quad \tilde{\boldsymbol{U}}_k^n = \frac{\sum_{i \in \nu(k)} |K_i| \, |\mathbf{U}_i^n|}{\sum_{i \in \nu(k)} |K_i|},$$

$$\phi_k^{n+1} = \phi_k^n - \Delta t F(P_k, t^n) \tilde{\boldsymbol{U}}_k^n, \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{k=1}^M \phi_k^{n+1} \lambda_k.$$

Autre formulation

$$\partial_t \Phi + F\,|\nabla \Phi| = 0.$$

Si $\nabla \Phi \neq 0$, on a : $\partial_t \Phi + F \dfrac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \cdot \nabla \Phi = 0$,

soit encore $\partial_t \Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = 0$,

avec $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t, \nabla \Phi) = F(\boldsymbol{x}, t) \dfrac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}(\boldsymbol{x}, t)$.

Difficultés

- Equation de convection non linéaire et non conservative
- Les méthodes numériques pour les équations de type convection ne sont pas facilement applicables
- Démarche non valable si $\nabla \Phi \neq 0$

Lemme

Soit D_k^n la droite de direction $\widetilde{\mathbf{U}}_k^n$ passant par le point P_k, alors cette droite coupe en amont un triangle d'indice $\rho(k) \in \nu(k)$.

Une autre approximation de $\nabla\Phi$ au point P_k est donnée par

$$\boldsymbol{U}_k^n = \boldsymbol{U}_{\rho(k)}^n.$$

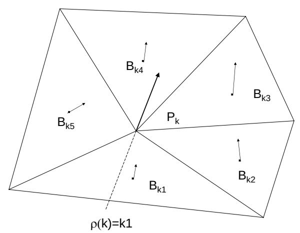


FIG.: Direction caractéristique au point P_k.

Schéma décentré

On calcule $\phi_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h^1$, par

$$1) \quad \boldsymbol{U}_i^n = \nabla \phi^n_{h|K_i}, \tilde{\boldsymbol{U}}_k^n = \frac{\sum_{i\in\nu(k)} |K_i|\,|\mathbf{U}_i^n|}{\sum_{i\in\nu(k)} |K_i|},$$

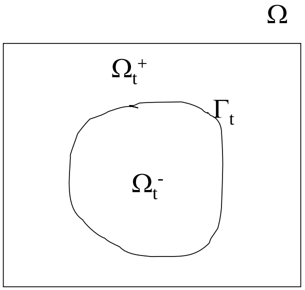
$$2) \quad \boldsymbol{U}_k^n \text{ (lemme)}, \boldsymbol{V}_k^n = \frac{\boldsymbol{U}_k^n}{|\boldsymbol{U}_k^n|},$$

$$3) \quad \phi_k^{n+1} = \phi_k^n - \Delta t \mathbf{v}_k^n \cdot \boldsymbol{U}_k^n = \phi_k^n - \Delta t \boldsymbol{U}_k^n,$$

$$4) \quad \phi_h^{n+1} = \sum_{k=1}^{k=M} \phi_k^{n+1} \lambda_k.$$

Frontière libre

$T = 1$,
$\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$,
Ω est composé de deux sous domaines Ω_t^+ et Ω_t^- séparés par une frontière libre Γ_t.



Test avec une fonction à gradient discontinu

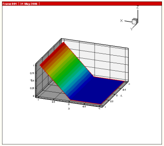


Fig.: solution exacte

Résultats numériques

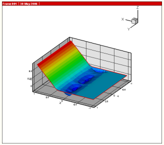


FIG.: solution calculée par le schéma non monotone

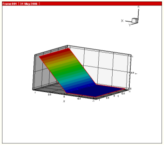


FIG.: solution calculée par le schéma décentré

Références

R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.

G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références

R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.

G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références

R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.

G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références

R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.

G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.

M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

Références

- R. ABGRALL. *Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi equations on Triangular Meshes*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1996.
- G. BARLES. (1994). *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, In mathématiques et Applications, Vol. 17, Springer-Verlag.
- M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**, (1983), pp 1-42.
- M.G. CRANDALL et P.L. LIONS : *Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Math. Comp. 43(167), (1984), pp 1-19.

P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.

P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.

J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.

S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.

P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.

J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.

S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

- P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.
- P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
- J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
- S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.

P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.

J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.

S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.

- P. L. Lions *Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Mathematical journal, 1985.
- P. L. Lions *Generalize solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
- J.A. SETHIAN. *Level Set Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
- S. Osher and J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-jacobi formulations*. J. Comput. Phys. 1988.