Calcul de solitons en optique non linéaire

Laurent Di Menza

Analyse Numérique et EDP

Laboratoire de Mathématiques

Université Paris-Sud Orsay

Plan de l'exposé

- Cas de l'équation de Schrödinger non linéaire
- Cas d'un système régissant la propagation dans des milieux quadratiques
- Conclusion

1 Solitons pour NLS

Equation de Schrödinger (NLS) : modèle universel intervenant en optique non linéaire, physique des plasmas, etc.

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi + \alpha|\psi|^{2\sigma}\psi = 0 \tag{1}$$

avec $\psi = \psi(t,x) \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = \pm 1$ et $\sigma > 0$.

Problème de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^d)$: Ginibre-Velo, Strauss, etc.

- Cas défocalisant $\alpha = -1$: globalement bien posé si $\sigma < \frac{2}{d-2}$.
- Cas focalisant $\alpha = 1$: - localement bien posé si $\sigma < \frac{2}{d-2}$
  - globalement bien posé si $\sigma < \frac{2}{d}$.

Solutions stationnaires :

Dans le cas focalisant, on cherche ψ de la forme $\psi(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$ $(\omega > 0)$ et $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, avec u solution de

$$-\omega u + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma < \sigma^* = \frac{2}{d-2}.$$

Rescaling $\implies \omega = 1$.

- En dimension $d = 1$: $u(x) = \dfrac{(\sigma+1)^{1/2\sigma}}{\cosh(\sigma x)^{1/\sigma}}$ par intégration.
- En dimension $d \geq 2$: situation plus riche : pas unicité !
  Hypothèses : $u(x) \equiv u(r)$, $r = \|x\|$ et $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = 0$ ("Bright soliton").

Recherche de bright solitons en dimension d :

Equation différentielle d'ordre 2 non linéaire

$$\begin{cases} u''(r) + \dfrac{d-1}{r} u'(r) - u(r) + |u(r)|^{2\sigma} u(r) = 0, \quad r > 0 \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = 0 \text{ (par régularité).} \end{cases} \tag{2}$$

Problème : déterminer la valeur de $u_0 := u_{0,k}$ telle que la solution de (2) s'annule k fois.

- $k = 0$: état fondamental (Weinstein).
- $k \geq 1$: états excités (Mc Leod-Troy-Weissler).

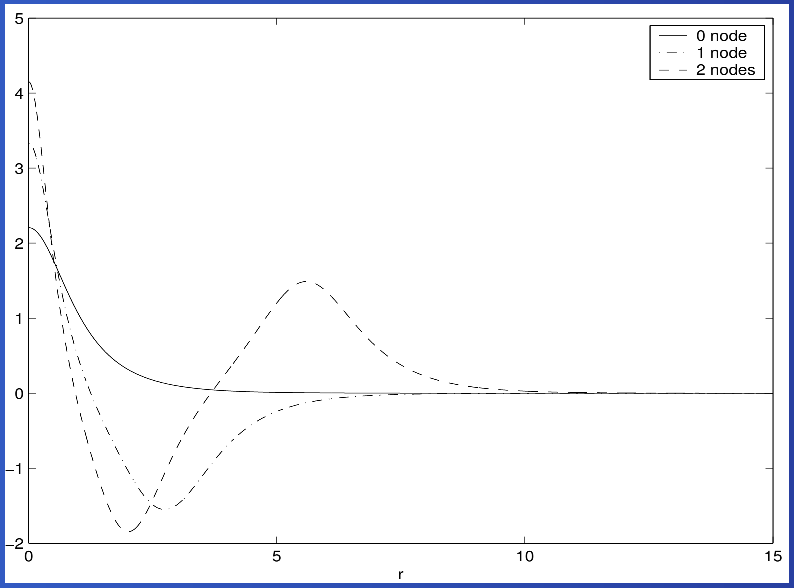
Utilisation de la méthode de tir.

Algorithme pour le calcul de $u_{k,0} := \beta$:

On part de $\beta \in [a_1, b_1]$ (par exemple, $a_1 = 0$ et $b_1 \gg 1$).

> pour n = 1,ndich
>
> > $\beta_n = (a_n + b_n)/2$;
> >
> > Résolution de (2) pour $r \in [0, R]$ avec $u_0 = \beta_n$;
> >
> > $d_n = \#\{r \leq R\,; u(r) = 0\}$;
> >
> > Si $d_n \leq b_k$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \beta_n$;
> >
> > Sinon, $a_{n+1} = \beta_n$ et $b_{n+1} = b_n$;
>
> fin

Cas $\sigma = 1$, $d = 2$:



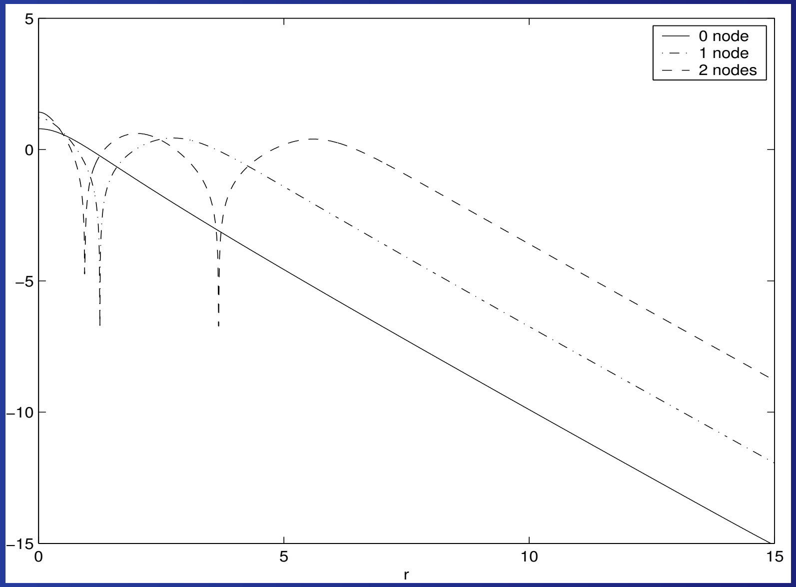


Figure 1: $u_k = f(r)$, $0 \leq k \leq 2$.

Figure 2: log $|u_k| = f(r)$, $0 \leq k \leq 2$.

Recherche de vortex en dimension 2

On pose $\psi(t,x,y) = e^{i\omega t} e^{im\theta} u(r)$ avec $m \in \mathbb{N}$ (m charge du vortex), (r,θ) coordonnées polaires de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors ψ vérifie (NLS) si

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) - \frac{m^2}{r^2}u(r) - u(r) + |u(r)|^{2\sigma}u(r) = 0. \tag{3}$$

Problème : terme supplémentaire $u(r)/r^2 \implies u_0 = 0$.

Changement de fonction : $u(r) := r^m U(r)$.

$$\implies U''(r) + \frac{2m+1}{r}U'(r) - U(r) + r^m|U(r)|^{2\sigma}U(r) = 0, \tag{4}$$

avec $(U(0), U'(0)) = (U_0, 0)$, U_0 calculé avec la méthode de tir.

Cas $\sigma = 1$:

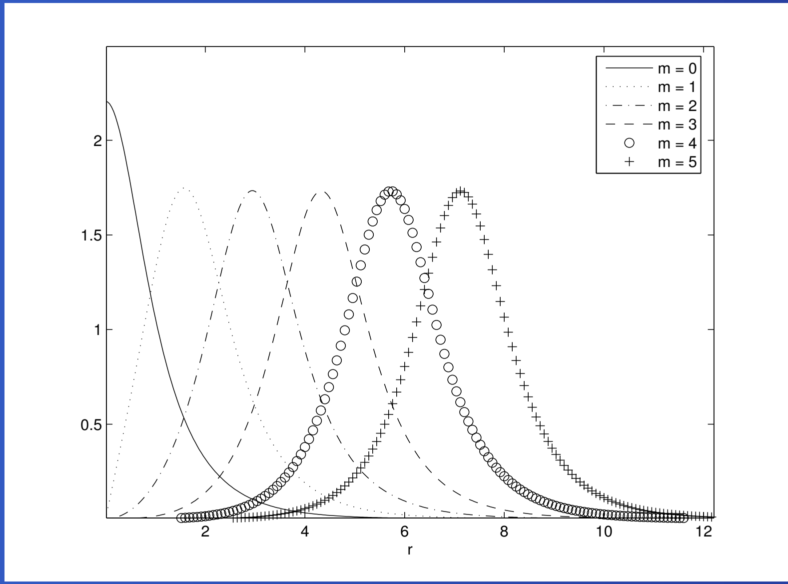


Figure 3: $u_{k,m} = f(r)$, $k = 0$, $0 \leq m \leq 5$.

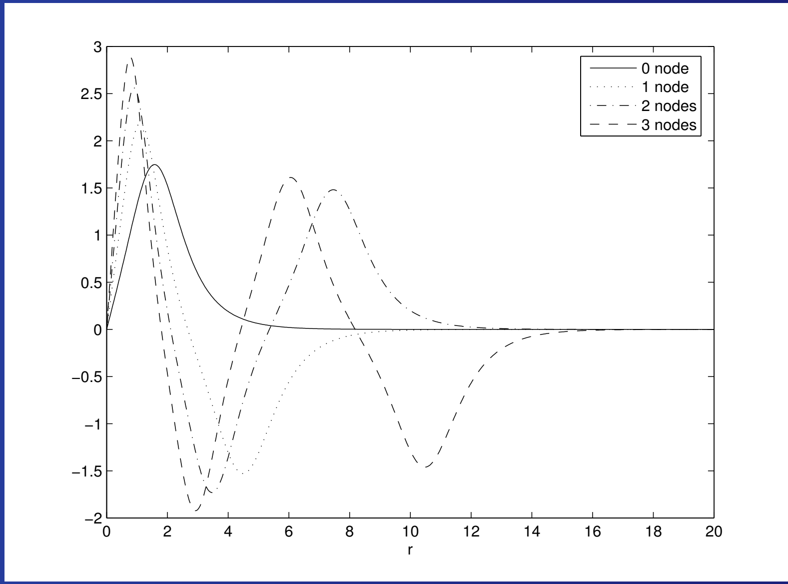


Figure 4: $u_{k,m} = f(r)$, $0 \leq k \leq 4$, $m = 1$.

Comportements asymptotiques

But : analyser le comportement lorsque $k \to \infty$.

Exemple : $c_1(1+k^2)^{d/2} \leq \|u_k\|_{L^2} \leq c_2(1+k^2)^{d/2}$ (Kajikiya '95).

Recherche d'une loi puissance du type $\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{\gamma(d,\sigma)}$ en calculant $\lambda = d \ln \|u_k\|_{L^\infty} / d \ln k$ pour k grand.

Quelques conjectures :

- Bright : $\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{\frac{1+\sigma^*/2}{\sigma^*-\sigma}}$, $\sigma^* = \frac{2}{d-2}$.
- Vortex : $\|U_{k,m}\|_{L^\infty} \sim k^{\frac{1+m\sigma}{2}}$.

Cas $d = 2$ et $d = 3$:

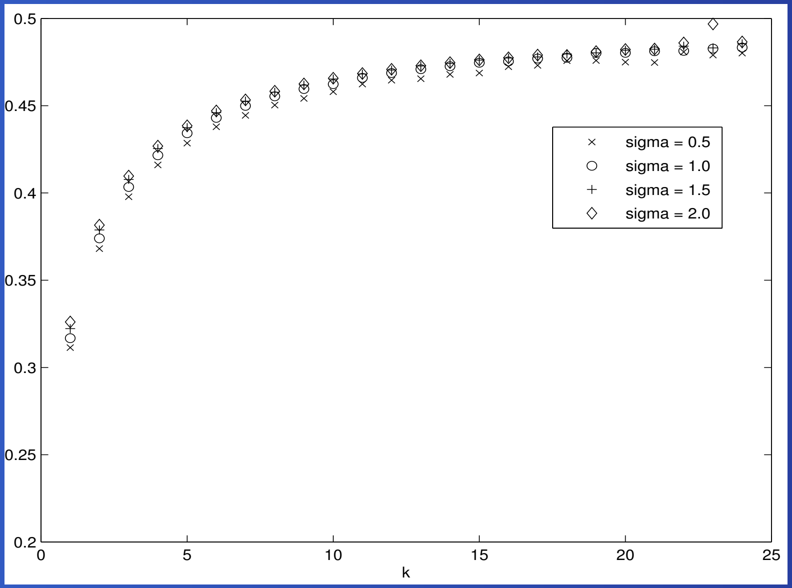


Figure 5: $\lambda = f(k)$, $d = 2$.

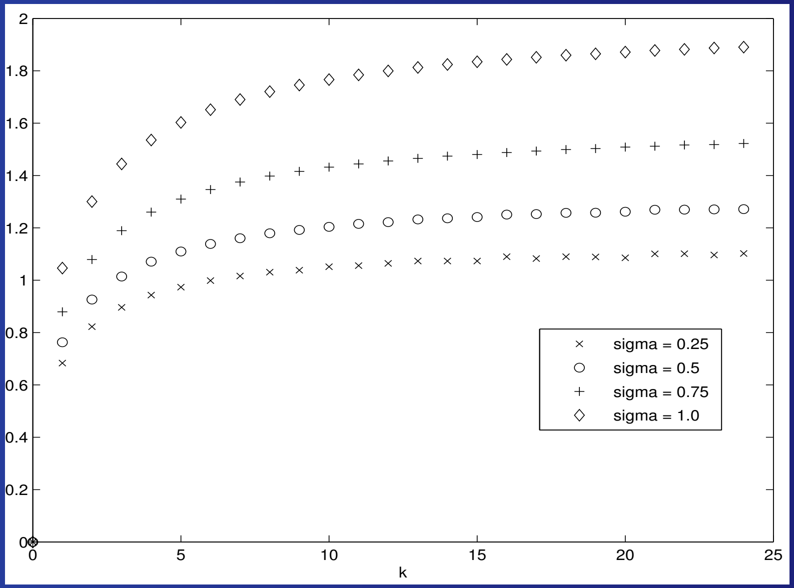


Figure 6: $\lambda = f(k)$, $d = 3$.

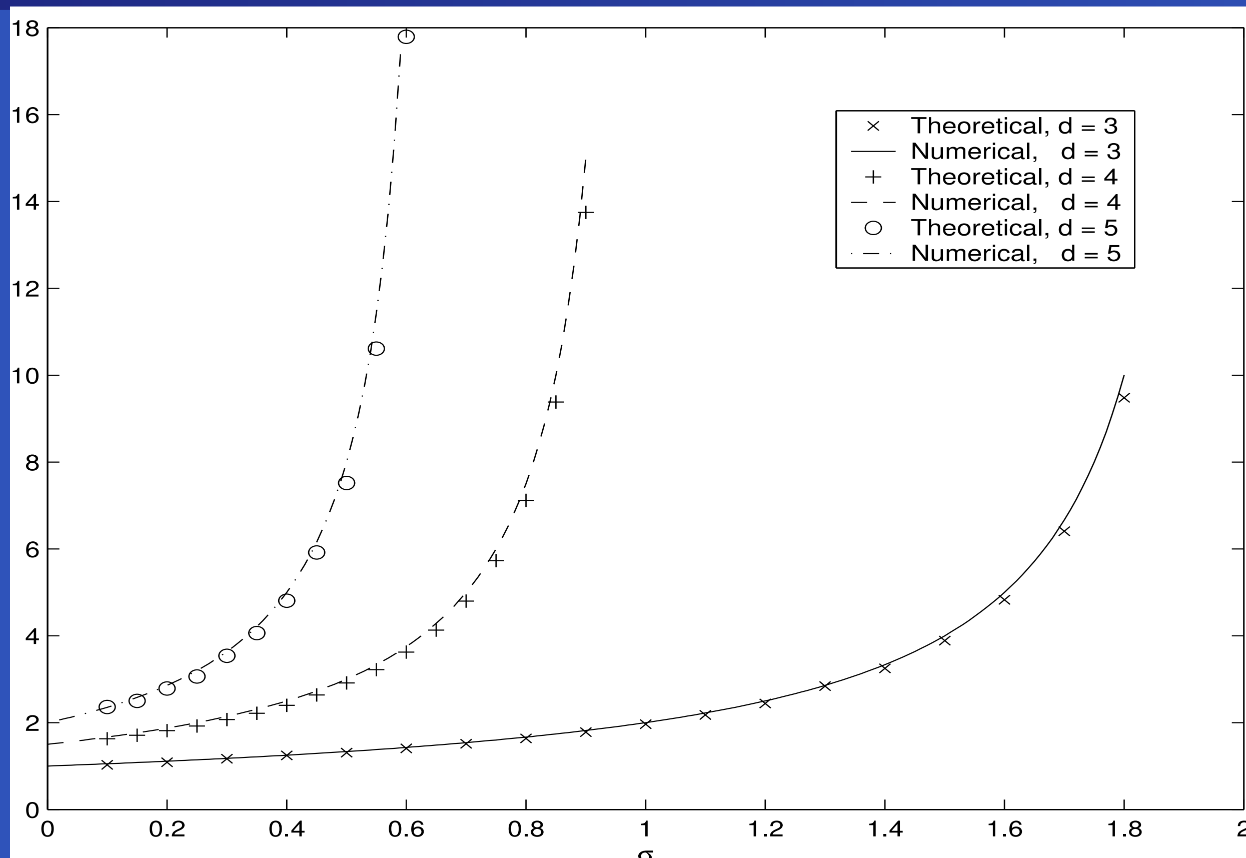


Figure 7: Comparaison entre λ et $\gamma(d,\sigma)$, $\sigma \in [0,\sigma^*[$, $d = 3,\ 4,\ 5$.

2 Milieux quadratiques

On considère à présent un modèle de propagation d'ondes dans un milieu non linéaire dit quadratique

- $\varphi = \varphi(\omega)$ (fréquence fondamentale)
- $\psi = \psi(2\omega)$ (fréquence double)

Système de Maxwell + simplifications + adimensionnements

$$\Longrightarrow \begin{cases} i\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \Delta\varphi - \varphi + \bar{\varphi}\psi = 0 \\[2ex] i\sigma\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + \Delta\psi - \rho\psi + \dfrac{1}{2}\varphi^2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

avec $\varphi = \varphi(z, x)$, $\psi = \psi(z, x)$, z variable de propagation le long de l'axe longitudinal et x variable transverse.

Etats stationnaires :

On pose $\varphi(z,x) = e^{i\omega z}u(x)$ et $\psi(z,x) = e^{2i\omega z}v(x)$, avec u et v localisées.

Système elliptique non linéaire : si $\omega = 0$ (sans perte de généralité),

$$\begin{cases} -u + \Delta u + \bar{u}v = 0 \\ \\ -\rho v + \Delta v + \dfrac{1}{2}u^2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Modèles intensivement étudiés en optique diffractive non linéaire (Buryak, Kivshar, Malomed, Wise, etc.)

Cas de la dimension 1

Hypothèse : u et v sont paires et décroissent vers zéro à l'infini.

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) + u(x)v(x) = 0 & x > 0 \\ v''(x) - \rho v(x) + \dfrac{1}{2}u^2(x) = 0 & \\ u(0) = u_0,\ v(0) = v_0,\ u'(0) = 0,\ v'(0) = 0. & \end{cases} \tag{7}$$

Proposition 1. *Soit (u_0, v_0) les valeurs en $x = 0$ correspondant à une solution localisée de (7). Alors on a la relation*

$$u_0^2 + \rho v_0^2 - u_0^2 v_0 = 0. \tag{8}$$

$\Longrightarrow$ un seul paramètre de tir à ajuster.

Solutions (u_k, v_k), $k \geq 1$:

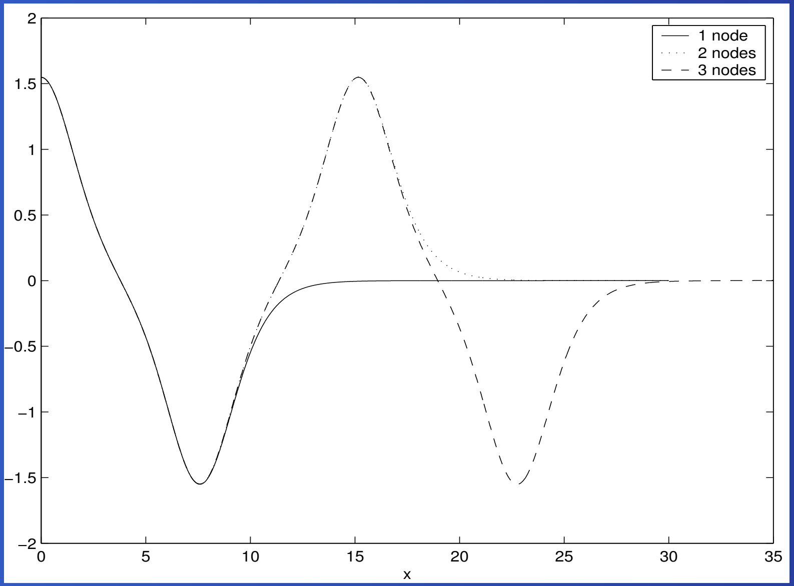


Figure 8: u_k, $1 \leq k \leq 3$.

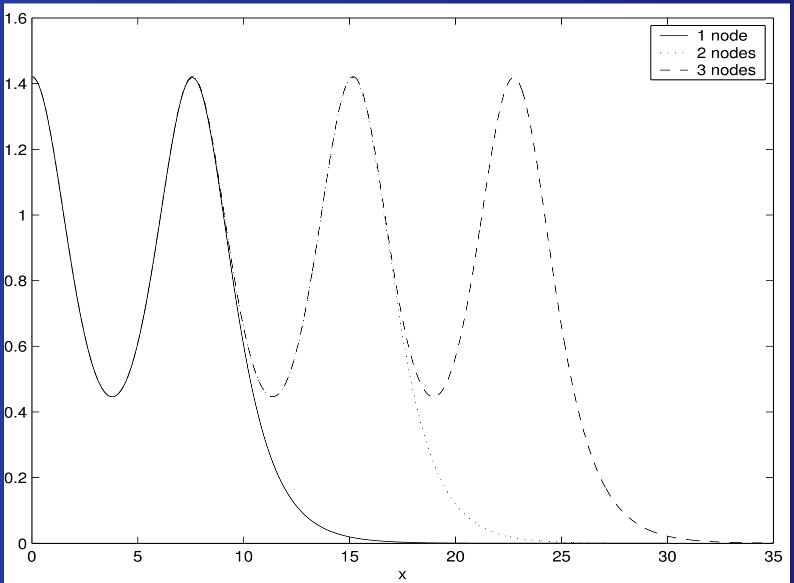


Figure 9: v_k, $1 \leq k \leq 3$.

Observation : $(u_{0,k}, v_{0,k}) \to (u_*, v_*)$ lorsque $k \to \infty$ (différent du cas (NLS) dans lequel $u_k \to \infty$).

k	$u_{0,k}$	$v_{0,k}$
0	1.55309535851485	1.41508910697179
1	1.54841943801909	1.42123527210442
2	1.54840928210547	1.42124884162844
3	1.54840925984781	1.42124887136843
4	1.54840925979908	1.42124887143354
5	1.54840925979861	1.42124887143418

Valeur limite : solution périodique du problème (non localisée en espace).

Dimensions d'espace supérieures

$$
\begin{cases}
u''(r) + \dfrac{d-1}{r} u'(r) - u(r) + u(r)v(r) = 0 & r > 0 \\[2ex]
v''(r) + \dfrac{d-1}{r} v'(r) - \rho v(r) + \dfrac{1}{2} u^2(r) = 0 & r > 0 \\[2ex]
u(0) = u_0,\ v(0) = v_0,\ u'(0) = 0,\ v'(0) = 0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

Plus de relation entre u_0 et v_0.

Méthode de tir à 2 paramètres : difficile d'ajuster simultanément u_0 et v_0 !

Idée : méthode de continuation

On considère la dimension comme un paramètre **réel** noté $s \geq 1$.
Soit alors $(u_s, v_s) = (u_s(r), v_s(r))$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} u_s''(r) + \dfrac{s-1}{r} u_s'(r) - u_s(r) + u_s(r)v_s(r) = 0 & r > 0 \\[2ex] v_s''(r) + \dfrac{s-1}{r} v_s'(r) - \rho v_s(r) + \dfrac{1}{2} u_s^2(r) = 0 & r > 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

Point de départ : états (u_1, v_1) calculés en dimension 1 d'espace.

Stratégie : suivre un chemin entre 1 et d en utilisant que (10) est identiquement satisfait et en dérivant par rapport au paramètre abstrait s.

Si $\dot{u}_s := du_s/ds$ et $\dot{v}_s := dv_s/ds$,

$$\begin{cases} \dot{u}_s''(r) + \dfrac{s-1}{r}\dot{u}_s'(r) - \dot{u}_s(r) + \dot{v}_s(r)u_s(r) + \dot{u}_s(r)v_s(r) = -\dfrac{1}{r}u_s'(r) \\ \dot{v}_s''(r) + \dfrac{s-1}{r}\dot{v}_s'(r) - \rho\dot{v}_s(r) + u_s(r)\dot{u}_s(r) = -\dfrac{1}{r}v_s'(r). \end{cases} \tag{11}$$

$(\dot{u}_s, \dot{v}_s)$ calculé à partir de (u_s, v_s) en résolvant un système elliptique linéaire couplé.

Soit $F\ : (u_s, v_s) \mapsto (\dot{u}_s, \dot{v}_s)$ solution de (11). On a donc une équation différentielle

$$\begin{cases} (\dot{u}_s, \dot{v}_s) = F((u_s, v_s)), \quad s \in [1, d] \\ (u_s, v_s)\big|_{s=1} = (u_1, v_1), \end{cases} \tag{12}$$

Exemple : $\rho = 0.2$

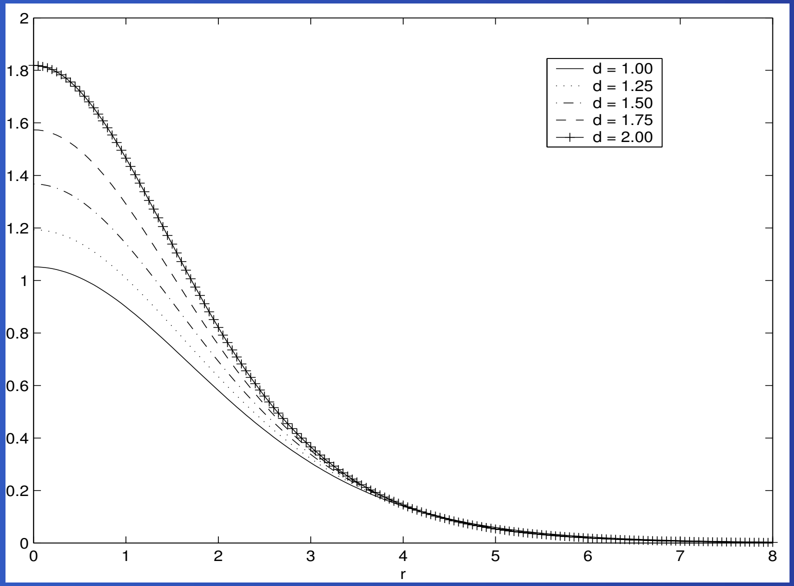


Figure 10: u_0, $d = 2$.

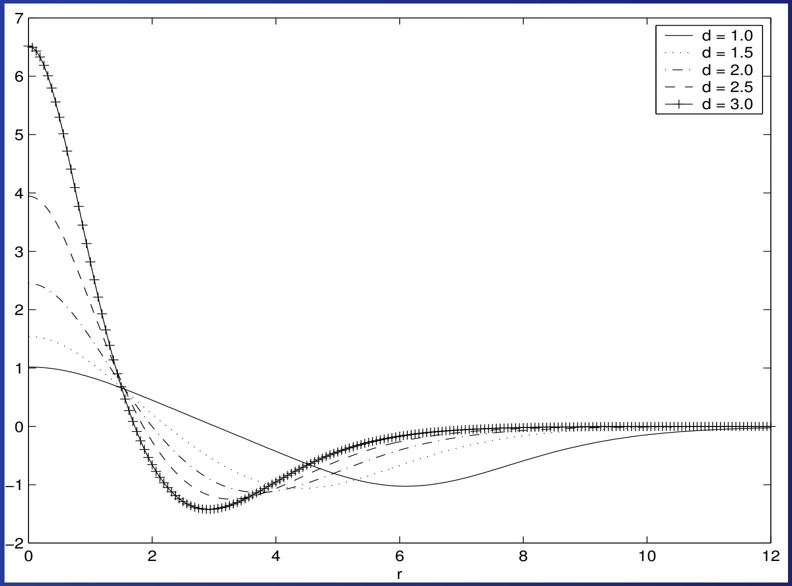


Figure 11: u_1, $d = 3$.

Résultats pour $d = 2$:

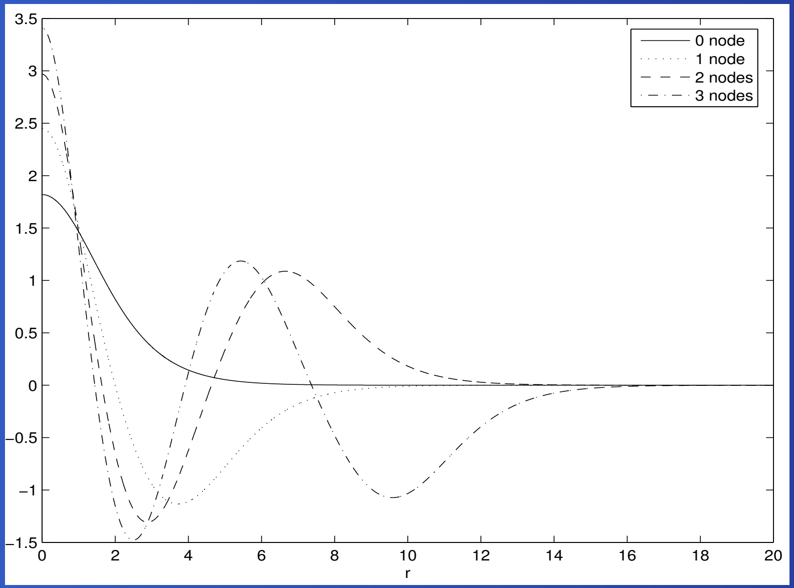


Figure 12: u_k $(0 \leq k \leq 3)$, $\rho = 0.2$.

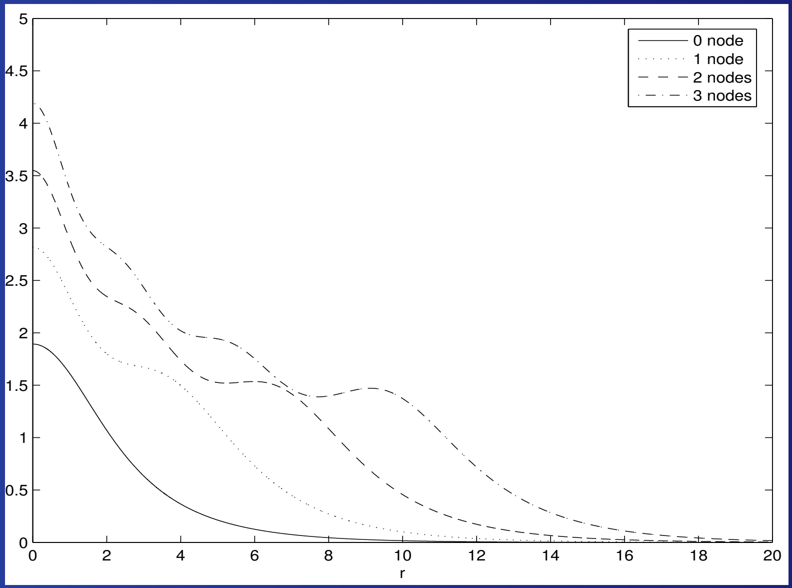


Figure 13: v_k $(0 \leq k \leq 3)$, $\rho = 0.2$.

Vortex en dimension 2

On pose $u(x) \equiv e^{im\theta}u(r)$ et $v(x) \equiv e^{2im\theta}v(r)$, $m \in \mathbb{N}$.

$$\left\{\begin{array}{l} u''(r) + \dfrac{1}{r}u'(r) - \dfrac{m^2}{r^2}u(r) - u(r) + \bar{u}(r)v(r) = 0 \\ \\ v''(r) + \dfrac{1}{r}v'(r) - \dfrac{4m^2}{r^2}v(r) - \rho v(r) + \dfrac{1}{2}u^2(r) = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

avec $u(0) = v(0) = 0$. Changement de fonctions : $u(r) := r^m U(r)$ et $v(r) := r^{2m}V(r)$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} U''(r) + \dfrac{1+2m}{r}U'(r) - U(r) + r^{2m}U(r)V(r) = 0 \\ \\ V''(r) + \dfrac{1+4m}{r}V'(r) - \rho V(r) + \dfrac{1}{2}U^2(r) = 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Stratégie :

Utilisation de la méthode de continuation par rapport au paramètre m : calcul de $(U_s(r), V_s(r))$, $0 \leq s \leq m$.

Dérivation par rapport à s :

$$\begin{cases} \dot{U}_s''(r) + \dfrac{1+2s}{r}\dot{U}_s'(r) - \dot{U}_s(r) + r^{2s}V_s(r)\dot{U}_s(r) + r^{2s}U_s(r)\dot{V}_s(r) = \\ \qquad\qquad -\dfrac{2}{r}U_s(r) - 2\log r\; r^{2s}U_s(r)V_s(r) \\ \dot{V}_s''(r) + \dfrac{1+4s}{r}\dot{V}_s'(r) - \rho\dot{V}_s(r) + U_s(r)\dot{U}_s(r) = -\dfrac{4}{r}V_s(r). \end{cases} \tag{15}$$

Point de départ : $s = 0 \implies$ solitons radiaux calculés pour $d = 2$.

Résultats pour $\rho = 0.2, m = 2$:

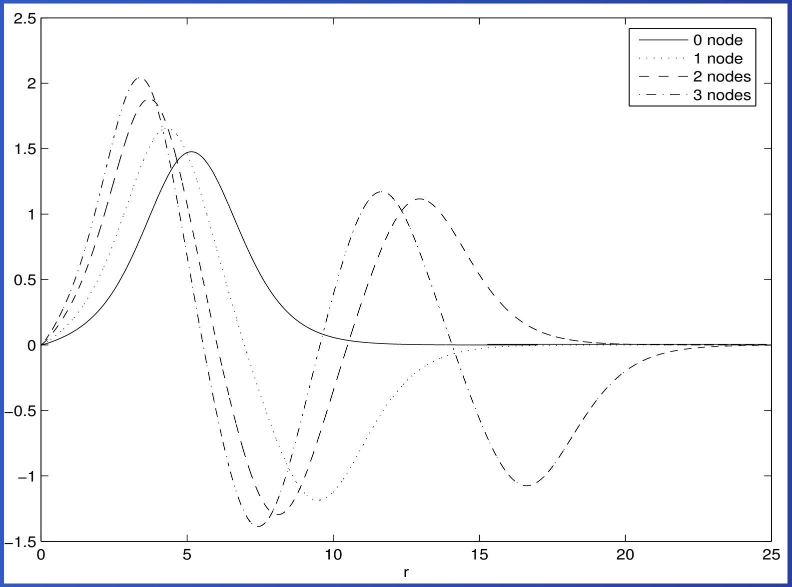


Figure 14: $u_{k,m}$, $0 \leq k \leq 3$.

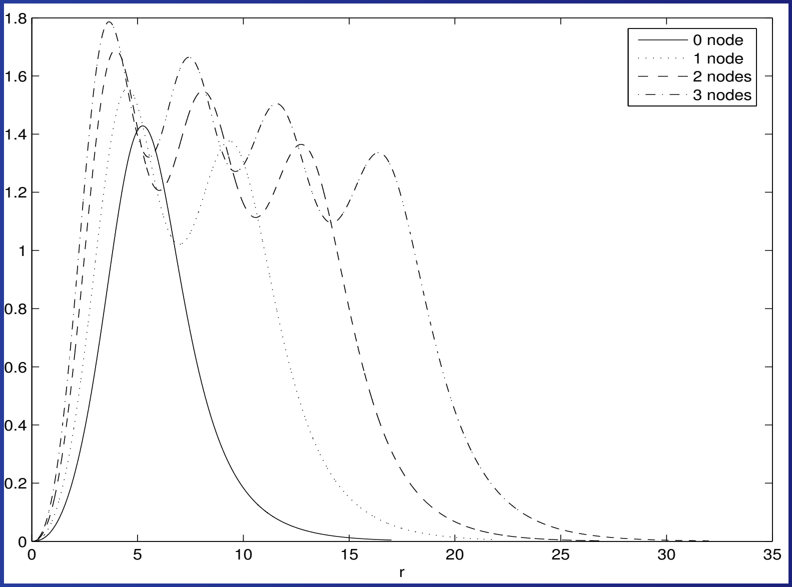


Figure 15: $v_{k,m}$, $0 \leq k \leq 3$.

3 Conclusion

- (NLS) : méthode de tir valable pour les états radiaux et les vortex bidimensionnels. Permet d'avoir des comportements asymptotiques précis.
- Milieux quadratiques :
  - Solutions en dimension 1 : méthode de tir encore opérationnelle.
  - Solutions en dimension $d \geq 2$: méthode de continuation robuste pour calculer des solutions en faisant varier d, ρ, m pour des vortex.
  - Méthode adaptable au cas de trois champs ou plus (même en dimension 1, on ne peut pas utiliser de méthode de tir !).