

---

# Couplage Raman-Landau pour l'interaction laser-plasma

Thierry Colin

Mathématiques Appliquées de Bordeaux, Université Bordeaux 1,  
CNRS UMR 5466 et CEA LRC M03,  
INRIA Futurs,  
351 cours de la Libération, 33405 Talence, FRANCE  
colin@math.u-bordeaux1.fr

# 1. Motivations

---

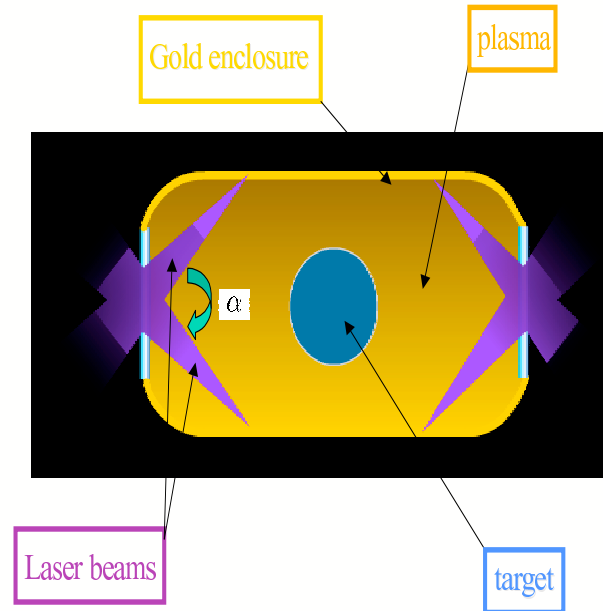
Simulation en laboratoire de la fusion par confinement inertiel.

# 1. Motivations

---

## Simulation en laboratoire de la fusion par confinement inertiel.

### I. Setting of the problem



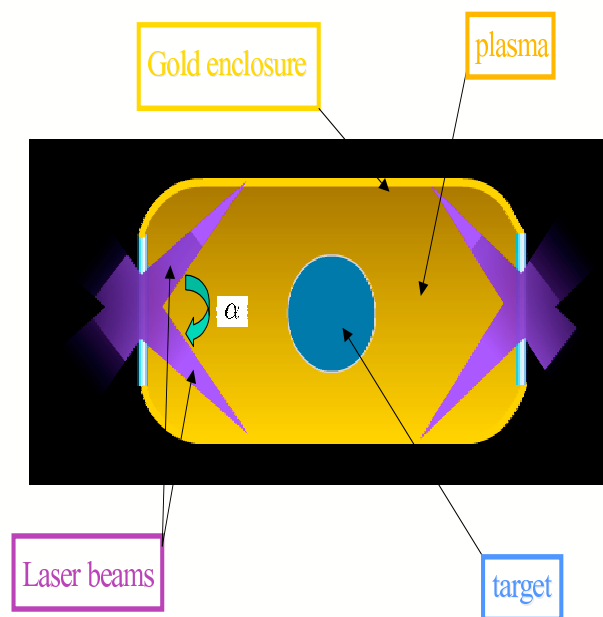
$\alpha$  : Angle between two crossing beams.

# 1. Motivations

---

Simulation en laboratoire de la fusion par confinement inertiel.

I. Setting of the problem



$\alpha$  : Angle between two crossing beams.

**Background:** Laser Méga-Joule, NIF.

**Collaborateurs:** CEA: G. Gallice, R. Belaouar.

**Bordeaux 1:** M. Colin, C. Galusinski, G. Métivier, V. Tikhonchuk

**Conseiller spécial:** J.-L. Joly.

# 1. Motivations

---

Plusieurs niveau de modélisation

# 1. Motivations

---

## Plusieurs niveau de modélisation

- Modèles cinétiques.

# 1. Motivations

---

## Plusieurs niveau de modélisation

- Modèles cinétiques.
- Modèles fluides comme **Euler-Maxwell**.

# 1. Motivations

---

## Plusieurs niveau de modélisation

- Modèles cinétiques.
- Modèles fluides comme **Euler-Maxwell**.
- Zakharov a introduit dans les années 70 les équations de Zakharov qui décrivent l'interaction **de l'enveloppe temporelle** du champs électrique **de la partie basse fréquence** de la variation de densité des ions.

# 1. Motivations

---

## Plusieurs niveau de modélisation

- Modèles cinétiques.
- Modèles fluides comme **Euler-Maxwell**.
- Zakharov a introduit dans les années 70 les équations de Zakharov qui décrivent l'interaction **de l'enveloppe temporelle** du champs électrique **de la partie basse fréquence** de la variation de densité des ions.
- C'est l'équivalent du système de **Davey-Stewartson** pour les water-waves.

# Plan

---

## 2. Le Raman.

# Plan

---

2. Le Raman.

3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

# Plan

---

2. Le Raman.

3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

4. Une discrétisation.

# Plan

---

2. Le Raman.

3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

4. Une discrétisation.

5. Le Landau.

# Plan

---

2. Le Raman.
3. Des résultats pour le problème de Cauchy.
4. Une discrétisation.
5. Le Landau.
5. Le couplage avec le Landau.

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Systeme d' Euler-Maxwell bifluide.

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

### Système d' Euler-Maxwell bifluide.

$$\partial_t \mathbf{B} + c \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{E} - c \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi e ((n_0 + n_e) \mathbf{v}_e - (n_0 + n_i) \mathbf{v}_i)$$

- $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  : champs électrique et magnétique.
- $\mathbf{v}_e$  et  $\mathbf{v}_i$  : vitesse des ions et des électrons.
- $n_0$  : densité moyenne du plasma.
- $n_e$  and  $n_i$  : variation des densités des électrons et des ions par rapport à  $n_0$ .

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

$$(n_0 + n_e) (\partial_t v_e + v_e \cdot \nabla v_e) = -\frac{\gamma_e T_e}{m_e} \nabla n_e - \frac{e(n_0 + n_e)}{m_e} \left( E + \frac{1}{c} v_e \times B \right)$$

$$(n_0 + n_i) (\partial_t v_i + v_i \cdot \nabla v_i) = -\frac{\gamma_i T_i}{m_i} \nabla n_i + \frac{e(n_0 + n_i)}{m_i} \left( E + \frac{1}{c} v_i \times B \right)$$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

$$(n_0 + n_e) (\partial_t v_e + v_e \cdot \nabla v_e) = -\frac{\gamma_e T_e}{m_e} \nabla n_e - \frac{e(n_0 + n_e)}{m_e} \left( E + \frac{1}{c} v_e \times B \right)$$

$$(n_0 + n_i) (\partial_t v_i + v_i \cdot \nabla v_i) = -\frac{\gamma_i T_i}{m_i} \nabla n_i + \frac{e(n_0 + n_i)}{m_i} \left( E + \frac{1}{c} v_i \times B \right)$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot ((n_0 + n_e) v_e) = 0$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot ((n_0 + n_i) v_i) = 0.$$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

$$(n_0 + n_e) (\partial_t v_e + v_e \cdot \nabla v_e) = -\frac{\gamma_e T_e}{m_e} \nabla n_e - \frac{e(n_0 + n_e)}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} v_e \times \mathbf{B} \right)$$

$$(n_0 + n_i) (\partial_t v_i + v_i \cdot \nabla v_i) = -\frac{\gamma_i T_i}{m_i} \nabla n_i + \frac{e(n_0 + n_i)}{m_i} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} v_i \times \mathbf{B} \right)$$

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot ((n_0 + n_e) v_e) = 0$$

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot ((n_0 + n_i) v_i) = 0.$$

### Constantes

- $m_e$  et  $m_i$  : masse des ions et des électrons.
- $T_e$  et  $T_i$  : température des ions et des électrons.
- $\gamma_e$  et  $\gamma_i$  : coefficients thermodynamiques.

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

La force de Lorentz est la même pour tous **mais**  $m_e \ll m_i$ :

=> vitesse des ions  $\ll$  vitesse des électrons

=> On néglige les ions dans le courant.

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

La force de Lorentz est la même pour tous **mais**  $m_e \ll m_i$ :

=> vitesse des ions  $\ll$  vitesse des électrons

=> On néglige les ions dans le courant.

On linéarise et on décompose les champs en une partie **longitudinale** + une partie **transverse**

$$B = B_{\parallel} + B_{\perp} \text{ avec } \nabla \times B_{\parallel} = 0 \text{ et } \nabla \cdot B_{\perp} = 0$$

de même pour  $E$  et  $v_e$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Ondes plasmas électroniques:

$$\partial_t B_{\parallel} = 0, \quad \partial_t E_{\parallel} = 4\pi e n_0 v_{e\parallel}$$

$$\partial_t v_{e\parallel} = -\frac{\gamma_e T_e}{m_e n_0} \nabla n_e - \frac{e}{m_e} E_{\parallel}, \quad \partial_t n_e + n_0 \nabla \cdot v_{e\parallel} = 0$$

$$[\partial_t^2 - v_{th}^2 \Delta + \omega_{pe}^2] v_{e\parallel} = 0$$

Pulsation Plasma  $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}}$

et vitesse thermique  $v_{th} = \sqrt{\frac{\gamma_e T_e}{m_e}}$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Ondes plasmas électroniques:

$$\partial_t B_{\parallel} = 0, \quad \partial_t E_{\parallel} = 4\pi e n_0 v_{e\parallel}$$

$$\partial_t v_{e\parallel} = -\frac{\gamma_e T_e}{m_e n_0} \nabla n_e - \frac{e}{m_e} E_{\parallel}, \quad \partial_t n_e + n_0 \nabla \cdot v_{e\parallel} = 0$$

$$[\partial_t^2 - v_{th}^2 \Delta + \omega_{pe}^2] v_{e\parallel} = 0$$

Pulsation Plasma  $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}}$

et vitesse thermique  $v_{th} = \sqrt{\frac{\gamma_e T_e}{m_e}}$

Relation de dispersion :

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 v_{th}^2.$$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

### Ondes Electro-magnetiques

$$\partial_t \mathbf{B}_\perp + c \nabla \times \mathbf{E}_\perp = 0$$

$$\partial_t \mathbf{E}_\perp - c \nabla \times \mathbf{B}_\perp = 4\pi e n_0 \mathbf{v}_{e\perp}$$

$$\partial_t \mathbf{v}_{e\perp} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_\perp$$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

### Ondes Electro-magnetiques

$$\partial_t \mathbf{B}_\perp + c \nabla \times \mathbf{E}_\perp = 0$$

$$\partial_t \mathbf{E}_\perp - c \nabla \times \mathbf{B}_\perp = 4\pi e n_0 \mathbf{v}_{e\perp}$$

$$\partial_t \mathbf{v}_{e\perp} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_\perp$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \mathbf{E}_\perp - c^2 \Delta \mathbf{E}_\perp + \omega_{pe}^2 \mathbf{E}_\perp = 0$$

Relation de **dispersion**:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2.$$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

$v_{th}$  est inférieure à  $c$  d'au moins un ordre de grandeur

$\Rightarrow$

$$[\partial_t^2 - v_{th}^2 \Delta + \omega_{pe}^2] E_{||} = 0$$

$$[\partial_t^2 - c^2 \Delta + \omega_{pe}^2] E_{\perp} = 0$$

ont des status différents

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

$v_{th}$  est inférieure à  $c$  d'au moins un ordre de grandeur

$\Rightarrow$

$$[\partial_t^2 - v_{th}^2 \Delta + \omega_{pe}^2] E_{||} = 0$$

$$[\partial_t^2 - c^2 \Delta + \omega_{pe}^2] E_{\perp} = 0$$

ont des status différents

• Les ondes électromagnétiques doivent être pensées sous la forme:

$e^{i(kx - \omega t)} E_{\perp}(t, x)$  avec  $\partial_t E_{\perp} \ll \omega E_{\perp}$  et  $\partial_x E_{\perp} \ll k E_{\perp}$ .

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

$v_{th}$  est inférieure à  $c$  d'au moins un ordre de grandeur

$\Rightarrow$

$$[\partial_t^2 - v_{th}^2 \Delta + \omega_{pe}^2] E_{||} = 0$$

$$[\partial_t^2 - c^2 \Delta + \omega_{pe}^2] E_{\perp} = 0$$

ont des status différents

- Les ondes électromagnétiques doivent être pensées sous la forme:

$e^{i(kx - \omega t)} E_{\perp}(t, x)$  avec  $\partial_t E_{\perp} \ll \omega E_{\perp}$  et  $\partial_x E_{\perp} \ll k E_{\perp}$ .

- Les ondes plasmas électroniques doivent être pensées sous la forme  $e^{-i\omega_{pe} t} E_{||}$

avec  $\partial_t E_{||} \ll \omega_{pe} E_{||}$ .

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Oscillations + nonlinearités créent des ondes basse fréquence :  
des ondes acoustiques ioniques.

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Oscillations + nonlinearités créent des ondes basse fréquence :  
des ondes acoustiques ioniques.

**Scenario:** on envoie le laser,

=> rétro-diffusion d'onde électromagnétique (composante Raman).

=> ondes plasma électronique.

=> ondes acoustique ionique.

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Oscillations + nonlinearités créent des ondes basse fréquence :  
des ondes acoustiques ioniques.

**Scenario:** on envoie le laser,

=> rétro-diffusion d'onde électromagnétique (composante Raman).

=> ondes plasma électronique.

=> ondes acoustique ionique.

et **rétroaction!**

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

### Conditions pour l'interaction

Interaction à trois ondes :

$$K_0 = K_R + K_1, \quad \omega_0 = \omega_R + \omega_{pe} + \omega_1$$

où  $(K_R, \omega_R)$  et  $(K_0, \omega_0)$  satisfont

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

### Conditions pour l'interaction

Interaction à trois ondes :

$$K_0 = K_R + K_1, \quad \omega_0 = \omega_R + \omega_{pe} + \omega_1$$

où  $(K_R, \omega_R)$  et  $(K_0, \omega_0)$  satisfont

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + K^2 c^2$$

et  $(K_1, \omega_{pe} + \omega_1)$  satisfont

$$(\omega_{pe} + \omega_1)^2 = \omega_{pe}^2 + v_{th}^2 K_1^2$$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Développement de type **optique diffractive** ([Joly-Métivier-Rauch])  
cas 3D, variables:  $(x, y, z)$ .

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Développement de type **optique diffractive** ([Joly-Métivier-Rauch])  
cas 3D, variables:  $(x, y, z)$ .

- Onde **Laser incidente** de potentiel vecteur  $A_L e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c.$
- La composante **Raman rétrodiffusée** de potentiel vecteur  $A_R e^{i(k_R z - \omega_R t)} + c.c.$
- L'onde **plasma électronique** :  $E_0 e^{-i\omega_{pe} t} + c.c..$
- La modulation basse fréquence de la **densité d'ions**:  $\langle \delta n \rangle$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

Développement de type **optique diffractive** ([Joly-Métivier-Rauch])  
cas 3D, variables:  $(x, y, z)$ .

- Onde **Laser incidente** de potentiel vecteur  $A_L e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c.$
- La composante **Raman rétrodiffusée** de potentiel vecteur  $A_R e^{i(k_R z - \omega_R t)} + c.c.$
- L'onde **plasma électronique** :  $E_0 e^{-i\omega_{pe} t} + c.c..$
- La modulation basse fréquence de la **densité d'ions**:  $\langle \delta n \rangle$

Le champ complet:

$$E = \frac{i\omega_0}{c} A_L(t, x, y, z) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + \frac{i\omega_R}{c} A_R(t, x, y, z) e^{i(k_R z - \omega_R t)} \\ + E_0(t, x, y, z) e^{-i\omega_{pe} t} + c.c.$$

## 2. Modèle d'interaction à 4 ondes.

---

La structure du système

$$i \left( \partial_t + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \partial_z \right) \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix}$$

$$= n \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nabla \cdot E_0 A_R e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)} \\ -\nabla \cdot E_0^* A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \\ \nabla (A_R^* \cdot A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}) \end{pmatrix}$$

$$(\partial_t^2 - \Delta) n = \Delta (|A_L|^2 + |A_R|^2 + |E_0|^2)$$

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

C'est une **extension** de :

$$i\partial_t E + \Delta E = nE,$$

$$\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta |E|^2$$

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

C'est une **extension** de :

$$i\partial_t E + \Delta E = nE,$$

$$\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta |E|^2$$

**Problem de Cauchy** : Sulem-Sulem ( 79), Added-Added (88), Ozawa-Tsutsumi (92), Bourgain (96), Ginibre-Tsutsumi-Velo (97).

**Explosion en temps fini**: Glangetas-Merle (94).

**Discrétisation**: Glassey+ une énorme littérature physique.

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

C'est aussi une **extension** de :

$$(i(\partial_t + \partial_z) + \Delta_{\perp}) A = nA,$$

$$\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta |A|^2$$

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

C'est aussi une **extension** de :

$$(i(\partial_t + \partial_z) + \Delta_{\perp}) A = nA,$$

$$\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta |A|^2$$

Le problème de Cauchy est très subtil.

**Th:** (Lineares, Ponce, Saut 04) Localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

C'est aussi une **extension** de :

$$(i(\partial_t + \partial_z) + \Delta_{\perp}) A = nA,$$

$$\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta |A|^2$$

Le problème de Cauchy est très subtil.

**Th:** (Lineares, Ponce, Saut 04) Localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Th:** (T.C., Métivier) Localement mal posé dans  $H^s(\mathbb{T}^n)$ .

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

C'est aussi une **extension** de :

$$(i(\partial_t + \partial_z) + \Delta_{\perp}) A = nA,$$

$$\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta |A|^2$$

Le problème de Cauchy est très subtil.

**Th:** (Lineares, Ponce, Saut 04) Localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Th:** (T.C., Métivier) Localement mal posé dans  $H^s(\mathbb{T}^n)$ .

Pour tous  $s$ , il existe des familles de solutions  $(\underline{u}, 0) + (u_k, n_k)$ , dans  $C^1([0, T_k]; H^s(\mathbb{T}))$  telles que

$$\|u_k(0), n_k(0), \partial_t n_k(0)\|_{H^s(\mathbb{T})} \rightarrow 0,$$

$$T_k \rightarrow 0,$$

$$\|u_k(T_k), n_k(T_k)\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow \infty.$$

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

Difficulté du système complet:

$$i \left( \partial_t + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \partial_z \right) \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix}$$

$$= n \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nabla \cdot E_0 A_R e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)} \\ -\nabla \cdot E_0^* A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \\ \nabla(A_R^* \cdot A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}) \end{pmatrix}$$

$$(\partial_t^2 - \Delta) n = \Delta (|A_L|^2 + |A_R|^2 + |E_0|^2)$$

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

Difficulté du système complet:

$$i \left( \partial_t + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \partial_z \right) \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix}$$
$$= n \begin{pmatrix} A_L \\ A_R \\ E_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nabla \cdot E_0 A_R e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)} \\ -\nabla \cdot E_0^* A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \\ \nabla(A_R^* \cdot A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}) \end{pmatrix}$$

$$(\partial_t^2 - \Delta) n = \Delta (|A_L|^2 + |A_R|^2 + |E_0|^2)$$

C'est sa partie **quasilinéaire** qui **n'est pas** hyperbolique.

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

Si  $A_L = u_1 + iu_2$ ,  $A_R = u_3 + iu_4$ ,  $E_0 = u_5 + iu_6$ , le système s'écrit:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = M \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

avec

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

Si  $A_L = u_1 + iu_2$ ,  $A_R = u_3 + iu_4$ ,  $E_0 = u_5 + iu_6$ , le système s'écrit:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = M \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -u_4 & -u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 & -u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_2 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ -u_4 & u_3 & u_2 & -u_1 & 0 & 0 \\ -u_3 & -u_4 & -u_1 & -u_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

Th: (Colins 04)

Localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ou  $H^s(\mathbb{T}^n)$ .

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

Th: (Colins 04)

Localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ou  $H^s(\mathbb{T}^n)$ .

Sketch de preuve:

Prendre  $\partial_t A_L, \partial_t A_R, \partial_t E^*, \Delta A_L, \Delta A_R, \Delta E^*$  comme nouvelles inconnues et utiliser que au premier ordre

### 3. Des résultats pour le problème de Cauchy.

---

Th: (Colins 04)

Localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ou  $H^s(\mathbb{T}^n)$ .

Sketch de preuve:

Prendre  $\partial_t A_L$ ,  $\partial_t A_R$ ,  $\partial_t E^*$ ,  $\Delta A_L$ ,  $\Delta A_R$ ,  $\Delta E^*$  comme nouvelles inconnues et utiliser que au premier ordre

$$i\partial_t A_L = -\Delta A_L$$

$$i\partial_t A_R = -\Delta A_R$$

$$i\partial_t E^* = +\Delta E^*$$

puis remplacer.

## 4. Une discrétisation

---

**Contraintes:** i) Proscrire les splitting.

ii) Conserver l'invariant

$$\int 2|A_L|^2 + |A_r|^2 + |E_0|^2(t) = Cte$$

iii) Traiter ensemble dispersion et non linéarité.

## 4. Une discrétisation

---

- Contraintes:** i) Proscrire les splitting.  
ii) Conserver l'invariant

$$\int 2|A_L|^2 + |A_r|^2 + |E_0|^2(t) = Cte$$

- iii) Traiter ensemble dispersion et non linéarité.

Schéma de type **pas fractionnaire**, **implicite**, d'ordre **2**, adapté de celui de **Ch. Besse**.

## 4. Une discrétisation

---

$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u$  est discrétisé par:

$$i \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + \Delta \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = \varphi^{n+1/2} \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$$

avec

## 4. Une discrétisation

---

$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u$  est discrétisé par:

$$i \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + \Delta \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = \varphi^{n+1/2} \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$$

avec

$$\frac{\varphi^{n+1/2} + \varphi^{n-1/2}}{2} = |u^n|^2$$

adaptation pour notre nonlinéarité.

## 4. Une discrétisation

---

$$\begin{aligned} & i \frac{A_L^{n+1} - A_L^n}{\delta t} + (iv_L \partial_y + \partial_y^2) \frac{A_L^{n+1} + A_L^n}{2} \\ = & \left( \frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \frac{A_L^{n+1} + A_L^n}{2} - \frac{1}{2} \varphi^{n+1/2} \frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2} e^{-i\theta^{n+1/2}} \\ & - \frac{1}{2} \psi^{n+1/2} \frac{\partial_y E^{n+1} + \partial_y E^n}{2} e^{-i\theta^{n+1/2}} \end{aligned}$$

avec

## 4. Une discrétisation

---

$$\begin{aligned} & i \frac{A_L^{n+1} - A_L^n}{\delta t} + (iv_L \partial_y + \partial_y^2) \frac{A_L^{n+1} + A_L^n}{2} \\ = & \left( \frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \frac{A_L^{n+1} + A_L^n}{2} - \frac{1}{2} \varphi^{n+1/2} \frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2} e^{-i\theta^{n+1/2}} \\ & - \frac{1}{2} \psi^{n+1/2} \frac{\partial_y E^{n+1} + \partial_y E^n}{2} e^{-i\theta^{n+1/2}} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\varphi^{n+1/2} + \varphi^{n-1/2}}{2} = \partial_y E^n$$

$$\frac{\psi^{n+1/2} + \psi^{n-1/2}}{2} = A_R^n$$

## 4. Une discrétisation

---

$$i \frac{A_R^{n+1} - A_R^n}{\delta t} + (iv_R \partial_y + \partial_y^2) \frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2}$$
$$= \left( \frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2} - (\varphi^{n+1/2})^* \frac{A_L^{n+1} + A_L^n}{2} e^{i\theta^{n+1/2}}$$

avec

$$\frac{\varphi^{n+1/2} + \varphi^{n-1/2}}{2} = \partial_y E^n$$

## 4. Une discrétisation

---

$$i \frac{A_R^{n+1} - A_R^n}{\delta t} + (iv_R \partial_y + \partial_y^2) \frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2}$$
$$= \left( \frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \frac{A_R^{n+1} + A_R^n}{2} - (\varphi^{n+1/2})^* \frac{A_L^{n+1} + A_L^n}{2} e^{i\theta^{n+1/2}}$$

avec

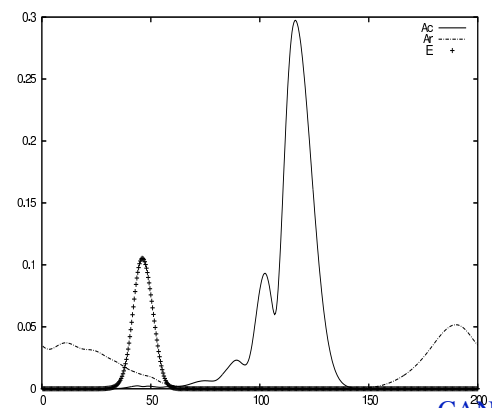
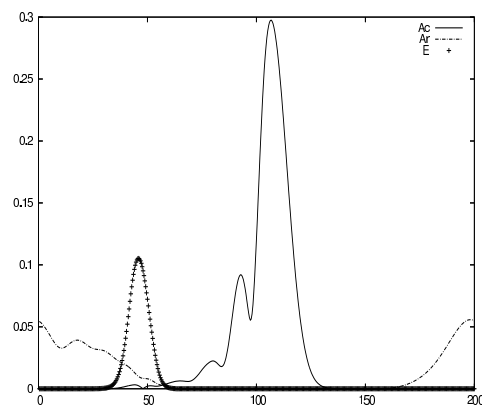
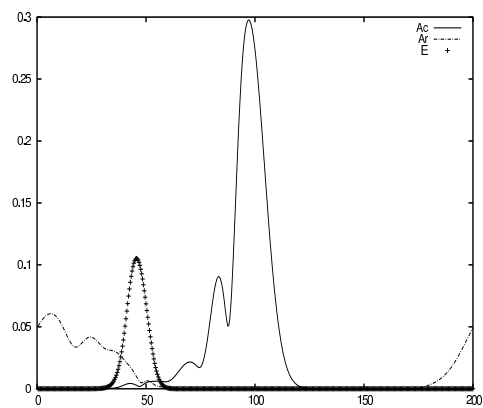
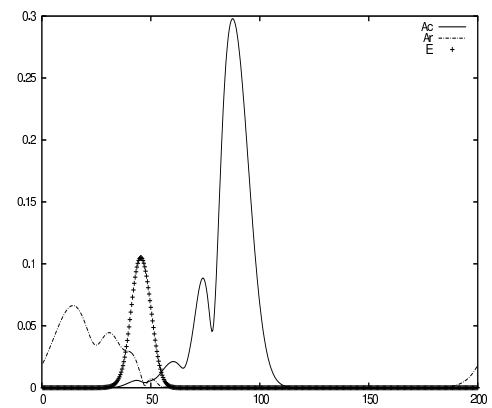
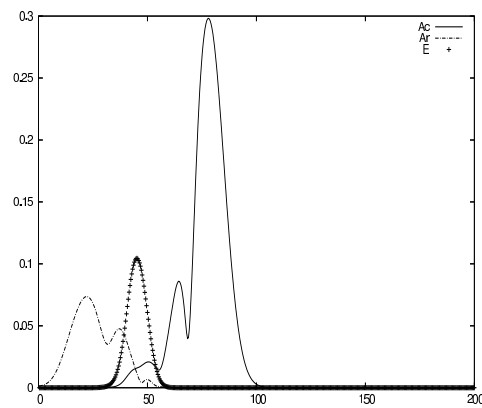
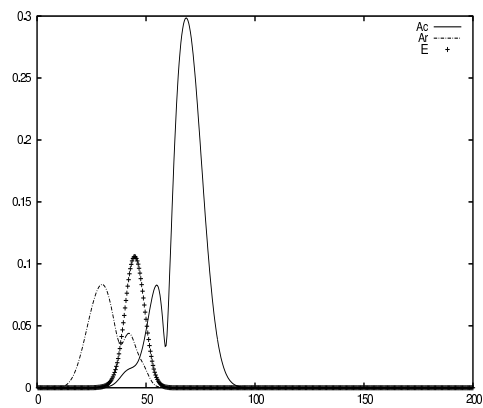
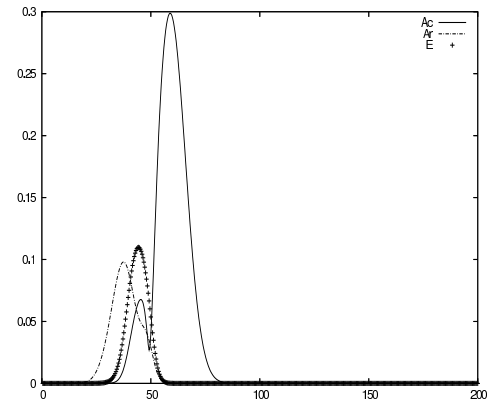
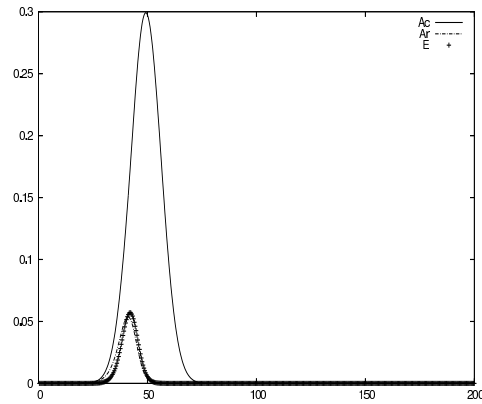
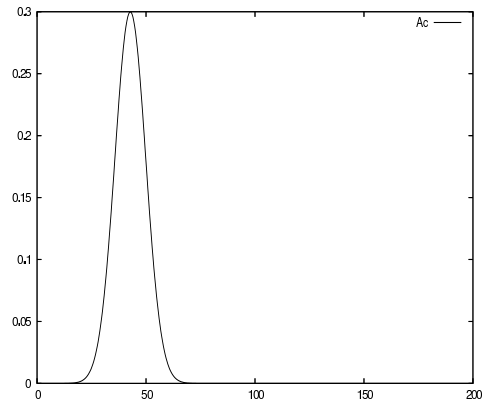
$$\frac{\varphi^{n+1/2} + \varphi^{n-1/2}}{2} = \partial_y E^n$$

Quelque chose de similaire sur  $E$ .

Sur la densité d'ions, on fait du **Glassey**.

**Ça conserve l'énergie.**

# 4. Une discrétisation.



## 5. Le Landau.

---

- Pourquoi?

L'amortissement Landau est une interaction onde-particule.

## 5. Le Landau.

---

- Pourquoi?

L'amortissement Landau est une interaction onde-particule.

Echange d'énergie entre les ondes plasma et les électrons.

=> les électrons sont accélérés à haute énergie

## 5. Le Landau.

---

- Pourquoi?

L'amortissement Landau est une interaction onde-particule.

Echange d'énergie entre les ondes plasma et les électrons.

=> les électrons sont accélérés à haute énergie

=> cela induit un préchauffage du combustible de fusion => réduit le gain de la cible.

## 5. Le Landau.

---

- Pourquoi?

L'amortissement Landau est une interaction onde-particule.

Echange d'énergie entre les ondes plasma et les électrons.

=> les électrons sont accélérés à haute énergie

=> cela induit un préchauffage du combustible de fusion => réduit le gain de la cible.

- Dérivation part de Vlasov-Maxwell.

## 5. Le Landau.

---

- Pourquoi?

L'amortissement Landau est une interaction onde-particule.

Echange d'énergie entre les ondes plasma et les électrons.

=> les électrons sont accélérés à haute énergie

=> cela induit un préchauffage du combustible de fusion => réduit le gain de la cible.

- Dérivation part de Vlasov-Maxwell.

On obtient un couplage entre  $E$  = l'enveloppe temporelle du champ électrique,  $\delta n$  = la partie basse fréquence de la variation de densité des ions,  $F_e$  = la moyenne spatiale de la fonction de distribution des électrons.

## 2. Le Landau

---

$$1) \quad i (\partial_t E + \nu \star E) + \partial_x^2 E = \delta n E + E_p(x) e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$$

$E_p$  = onde pompe donnée par l'instabilité Raman.

$\nu$  = terme d'amortissement Landau.

## 2. Le Landau

---

$$1) \quad i (\partial_t E + \nu \star E) + \partial_x^2 E = \delta n E + E_p(x) e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$$

$E_p$  = onde pompe donnée par l'instabilité Raman.

$\nu$  = terme d'amortissement Landau.

$$2) \quad \partial_t^2 \delta n - \mu \partial_x^2 \delta n = \frac{\mu}{4} \partial_x^2 (|E|^2)$$

## 2. Le Landau

---

$$1) \quad i(\partial_t E + \nu \star E) + \partial_x^2 E = \delta n E + E_p(x) e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$$

$E_p$  = onde pompe donnée par l'instabilité Raman.

$\nu$  = terme d'amortissement Landau.

$$2) \quad \partial_t^2 \delta n - \mu \partial_x^2 \delta n = \frac{\mu}{4} \partial_x^2 (|E|^2)$$

$$3) \quad \hat{v}(t, \xi) = -\frac{\pi}{2\xi |\xi|} \partial_v F_e(t, v = \frac{\omega_{pe}}{\xi}), \quad \xi \in \Omega_\xi,$$

## 2. Le Landau

---

$$1) \quad i(\partial_t E + \nu \star E) + \partial_x^2 E = \delta n E + E_p(x) e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$$

$E_p$  = onde pompe donnée par l'instabilité Raman.

$\nu$  = terme d'amortissement Landau.

$$2) \quad \partial_t^2 \delta n - \mu \partial_x^2 \delta n = \frac{\mu}{4} \partial_x^2 (|E|^2)$$

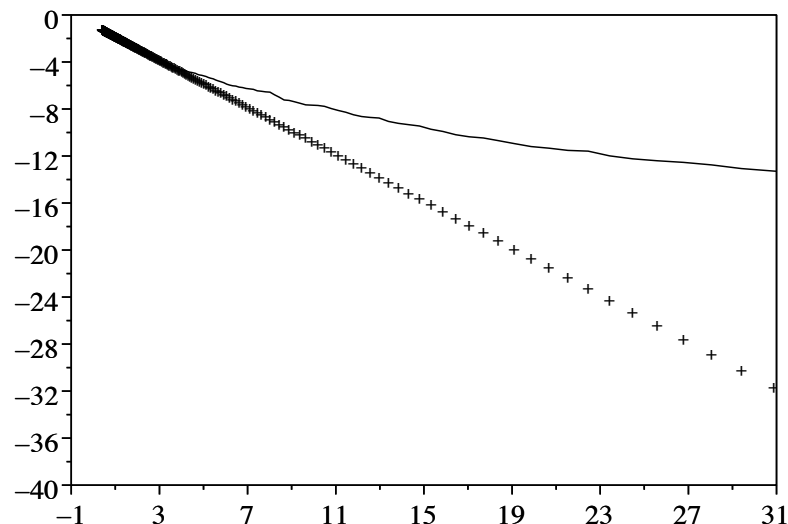
$$3) \quad \hat{v}(t, \xi) = -\frac{\pi}{2\xi |\xi|} \partial_v F_e(t, v = \frac{\omega_{pe}}{\xi}), \quad \xi \in \Omega_\xi,$$

$$4) \quad \partial_t F_e = \partial_v (D(t, v) \partial_v F_e)$$

$$D(t, v) = \frac{1}{4|v|} \left| \hat{E} \left( t, \xi = \frac{\omega_{pe}}{v} \right) \right|^2, \quad v \in \Omega_v.$$

## 5. Le Landau

$\log(F_e)$



$m_e v^2 / 2v_{the}^2$

Ligne continue = log de la moyenne spatiale de la fonction de distribution des électrons en fonctions de l'énergie des électrons

$m_e v^2 / 2v_{the}^2$  au temps final du calcul  $\omega_{pe} t = 16000$

Ligne en "+" = à la distribution initiale. On voit un **chauffage** significatif des électrons.

## 6. Le couplage avec le Raman.

---

Pour le **champ laser**  $A_L$

$$i \left( \partial_t + \frac{k_0 c^2}{\omega_0} \partial_z \right) A_L + \frac{c^2}{2\omega_0} \Delta A_L - \frac{k_0^2 c^4}{2\omega_0^3} \partial_z^2 A_L$$
$$= \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0} \langle \delta n \rangle A_L - \frac{e}{2m_e \omega_0} (\nabla \cdot E_0) A_L e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)},$$

## 6. Le couplage avec le Raman.

---

Pour le **champ laser**  $A_L$

$$\begin{aligned} & i \left( \partial_t + \frac{k_0 c^2}{\omega_0} \partial_z \right) A_L + \frac{c^2}{2\omega_0} \Delta A_L - \frac{k_0^2 c^4}{2\omega_0^3} \partial_z^2 A_L \\ &= \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0} \langle \delta n \rangle A_L - \frac{e}{2m_e \omega_0} (\nabla \cdot E_0) A_R e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)}, \end{aligned}$$

Pour le **champ Raman**  $A_R$

$$\begin{aligned} & i \left( \partial_t + \frac{k_R c^2}{\omega_R} \partial_z \right) A_R + \frac{c^2}{2\omega_R} \Delta A_R - \frac{k_R^2 c^4}{2\omega_R^3} \partial_z^2 A_R \\ &= \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_R} \langle \delta n \rangle A_R - \frac{e}{2m_e \omega_R} (\nabla \cdot E_0^*) A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}, \end{aligned}$$

## 5. Le couplage avec le Raman.

---

Pour le **champ plasma électronique**  $E_0$

$$i\partial_t E_0 + \left( \frac{v_{th}^2}{2\omega_{pe}} \nabla \nabla \cdot E_0 - \frac{c^2}{2\omega_{pe}} \nabla \times \nabla \times E_0 \right) \\ = \frac{\omega_{pe}}{2} (\langle \delta n \rangle E_0) + \frac{e\omega_{pe}}{2c^2 m_e} \nabla \left( A_R^* \cdot A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \right),$$

## 5. Le couplage avec le Raman.

---

Pour le **champ plasma électronique**  $E_0$

$$i\partial_t E_0 + \left( \frac{v_{th}^2}{2\omega_{pe}} \nabla \nabla \cdot E_0 - \frac{c^2}{2\omega_{pe}} \nabla \times \nabla \times E_0 \right) \\ = \frac{\omega_{pe}}{2} \langle \delta n \rangle E_0 + \frac{e\omega_{pe}}{2c^2 m_e} \nabla \left( A_R^* \cdot A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \right),$$

Pour les **ondes acoustiques**  $\delta n$

$$(\partial_t^2 - c_s^2 \Delta) \langle \delta n \rangle = \frac{1}{4\pi n_0 m_i} \Delta \left( |E_0|^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} (|A_L|^2 + |A_R|^2) \right).$$

## 5. Le couplage avec le Raman.

---

Pour le **champ plasma électronique**  $E_0$

$$i\partial_t E_0 + i\nu_e * E_0 + \left( \frac{v_{th}^2}{2\omega_{pe}} \nabla \nabla \cdot E_0 - \frac{c^2}{2\omega_{pe}} \nabla \times \nabla \times E_0 \right) \\ = \frac{\omega_{pe}}{2} (\langle \delta n \rangle E_0) + \frac{e\omega_{pe}}{2c^2 m_e} \nabla \left( A_R^* \cdot A_L e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \right),$$

Pour les **ondes acoustiques**  $\delta n$

$$(\partial_t^2 - c_s^2 \Delta) \langle \delta n \rangle = \frac{1}{4\pi n_0 m_i} \Delta \left( |E_0|^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} (|A_L|^2 + |A_R|^2) \right).$$

## 5. Le couplage avec le Raman.

---

Les difficultés:

i) **Le couplage.** Certaines équations doivent être traitées par du Fourier, d'autre en différences finies.

## 5. Le couplage avec le Raman.

---

Les difficultés:

- i) **Le couplage.** Certaines équations doivent être traitées par du Fourier, d'autre en différences finies.
- ii) **Les conditions aux limites.** On a besoin sur les champs  $A_C$  et  $A_R$  de conditions de type "transparentes" afin de limiter les réflexions au bord ainsi que les retours dûs à de la périodicité. Cf. exposé de R. Belaouar

## 5. Le couplage avec le Raman.

---

Les difficultés:

- i) **Le couplage.** Certaines équations doivent être traitées par du Fourier, d'autre en différences finies.
- ii) **Les conditions aux limites.** On a besoin sur les champs  $A_C$  et  $A_R$  de conditions de type "transparentes" afin de limiter les réflexions au bord ainsi que les retours dûs à de la périodicité. Cf. exposé de R. Belaouar
- iii) **L'accord de phase.** La condition de résonance à trois ondes doit être parfaitement vérifiée d'un point de vue numérique afin de ne pas sous-estimer l'anortissement Landau. On remplace la relation de dispersion de Schrödinger par celle de Crank-Nicholson.