

Fluides visco-élastiques en domaine mince

Guy BAYADA, Laurent CHUPIN et Sébastien MARTIN

Institut Camille Jordan - UMR 5208
INSA de Lyon

30 mai 2006

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique du modèle visco-élastique en couche mince
- 3 Résultats numériques

Écoulements de fluides

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F} + \operatorname{div} \Sigma, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \\ \Sigma = -p \operatorname{Id} + 2\eta D(\mathbf{U}) \end{array} \right.$$

- 1 Modèle de Navier-Stokes (fluides newtoniens)
- 2 Fluides quasi-newtoniens
- 3 Fluides visco-élastiques

Ecoulements de fluides

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F} + \operatorname{div} \Sigma, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \\ \Sigma = -p \operatorname{Id} + 2\eta(|D(\mathbf{U})|) D(\mathbf{U}) \\ \eta(|D(\mathbf{U})|) = m|D(\mathbf{U})|^n \end{array} \right.$$

- 1 Modèle de Navier-Stokes (fluides newtoniens)
- 2 Fluides quasi-newtoniens
- 3 Fluides visco-élastiques

Ecoulements de fluides

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F} + \operatorname{div} \Sigma, & \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \\ \Sigma = -p \operatorname{Id} + 2\eta(1-r) D(\mathbf{U}) + \sigma \\ \lambda \left(\frac{d\sigma}{dt} + g(\nabla \mathbf{U}, \sigma) \right) + f(\sigma) \sigma = 2\eta r D(\mathbf{U}). \end{cases}$$

- 1 Modèle de Navier-Stokes (fluides newtoniens)
- 2 Fluides quasi-newtoniens
- 3 Fluides visco-élastiques

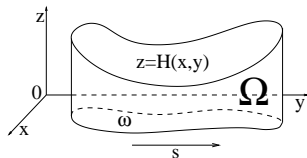
Ecoulements en film mince

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}^\varepsilon}{dt} - \eta \Delta \mathbf{U}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{U}^\varepsilon = 0. \end{cases}$$

passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

- Equation en (\mathbf{U}, p) avec $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$.
- Equation en pression (Equation de Reynolds) :

$$\operatorname{div}_x \left(\frac{h^3}{12\eta} \nabla_x p \right) = \operatorname{div}_x \left(\frac{\mathbf{s}h}{2} \right)$$



Ecoulements en film mince

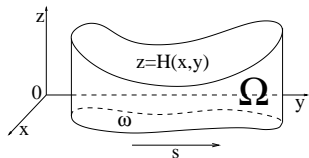
$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}^\varepsilon}{dt} - \operatorname{div} (2\eta(|D(\mathbf{U}^\varepsilon)|)D(\mathbf{U}^\varepsilon)) + \nabla p^\varepsilon = \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{U}^\varepsilon = 0. \end{cases}$$

passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

- Equation en (\mathbf{U}, p) avec $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

- Equation en pression (Equation de Reynolds **généralisée**) :

$$\operatorname{div}_x \left(\frac{h^3}{12\eta} \nabla_x p + \text{non linéarités} \right) = \operatorname{div}_x \left(\frac{sh}{2} \right)$$



Fluides visco-élastiques en films minces

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}^\varepsilon}{dt} - \eta(1-r)\Delta\mathbf{U}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{0}, & \operatorname{div}\mathbf{U}^\varepsilon = 0, \\ \lambda\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon}{dt} + g(\nabla\mathbf{U}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)\right) + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = 2\eta r D(\mathbf{U}^\varepsilon). \end{cases}$$

passage à la limite (formel) $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{cases} -\eta(1-r)\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial z} + \nabla_x p = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \operatorname{div}_x \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\eta r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}{1 + C^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|^2},$$

\implies Pas d'équation simple en pression

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique du modèle visco-élastique en couche mince
- 3 Résultats numériques

- Problème fort (cas newtonien):

$$(\mathcal{P}_s) \left\{ \begin{array}{l} -\eta \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \nabla_x \mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\omega) \\ \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad \text{dans } L^2(\Gamma), \quad \mathbf{p} = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^p) \\ \int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^q). \end{array} \right.$$

- Problème fort (cas newtonien):

$$(\mathcal{P}_s) \begin{cases} -\eta \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \nabla_x \mathbf{p} = \mathbf{F}, & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \right) = 0 & \text{dans } L^2(\omega) \\ \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad \text{dans } L^2(\Gamma), & \mathbf{p} = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^p) \\ \int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_0 & \text{dans } L^2(\partial\omega^q). \end{cases}$$

- Problème faible (\mathcal{P}_w) posé dans

$$K(\mathbf{s}, \mathbf{q}_0) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L^2(\Omega), \varphi = \mathbf{s} \text{ dans } L^2(\Gamma), \right.$$

$$\left. \forall \theta \in \mathcal{D}(\bar{\omega}); \theta|_{\partial\omega^p} = \zeta \in \mathbb{R}, \iint_{\omega} \nabla_x \theta \cdot \left(\int_0^h \varphi(\cdot, z) dz \right) = \int_{\partial\omega^q} (\theta - \zeta) \mathbf{q}_0 \right\}.$$

- Problème fort (cas newtonien):

$$(\mathcal{P}_s) \left\{ \begin{array}{l} -\eta \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \nabla_x \mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\omega) \\ \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad \text{dans } L^2(\Gamma), \quad p = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^p) \\ \int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^q). \end{array} \right.$$

- Problème faible (\mathcal{P}_w) posé dans

$$K(\mathbf{s}, \mathbf{q}_0) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L^2(\Omega), \varphi = \mathbf{s} \text{ dans } L^2(\Gamma), \right.$$

$$\left. \forall \theta \in \mathcal{D}(\bar{\omega}); \theta|_{\partial\omega^p} = \zeta \in \mathbb{R}, \iint_{\omega} \nabla_x \theta \cdot \left(\int_0^h \varphi(\cdot, z) dz \right) = \int_{\partial\omega^q} (\theta - \zeta) \mathbf{q}_0 \right\}.$$

Nouvelle preuve dans le cas newtonien

Théorème 1

Le problème faible (\mathcal{P}_w) admet une unique solution.

Théorème 2

Si \mathbf{u} est la solution de (\mathcal{P}_w) et si $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ alors il existe une unique pression $p \in H^1(\omega)$ telle que (\mathbf{u}, p) est l'unique solution du problème fort (\mathcal{P}_s) .

Preuve adaptée au cas visco-élastique

- Problème fort (cas visco-élastique):

$$(\mathcal{P}_{s\text{-elast}}) \left\{ \begin{array}{l}
 -\eta(1-r) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \nabla_x p - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}{1 + C^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|^2} \right) = \mathbf{F}, \\
 \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\
 \operatorname{div}_x \left(\int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\omega) \\
 \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad \text{dans } L^2(\Gamma), \quad p = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^p) \\
 \int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \cdot \mathbf{n} = q_0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^q).
 \end{array} \right.$$

Preuve adaptée au cas visco-élastique

Théorème 3

Si $r < 8/9$ alors le problème faible ($\mathcal{P}_{w-elastic}$) admet une unique solution.

Théorème 4

Si \mathbf{u} est une solution de ($\mathcal{P}_{w-elastic}$) et si $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ alors il existe une unique pression $p \in H^1(\omega)$ telle que (\mathbf{u}, p) est l'unique solution du problème fort ($\mathcal{P}_{s-elastic}$).

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Etude théorique du modèle visco-élastique en couche mince
- 3 Résultats numériques**

Modèle numérique utilisé

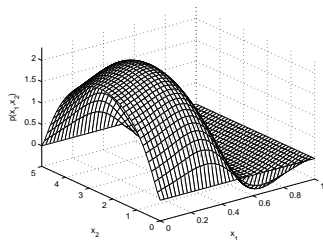
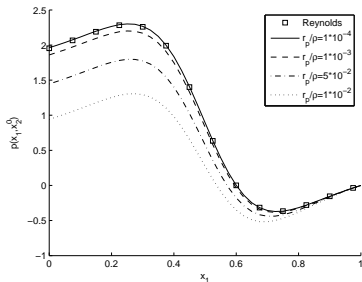


Figure: Convergence de la méthode

Effets de la visco-élasticité

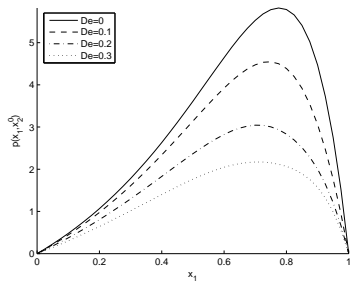


Figure: Influence du nombre de Deborah

Effets de la visco-élasticité

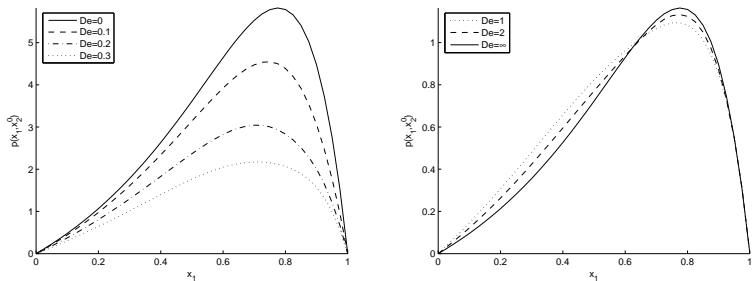
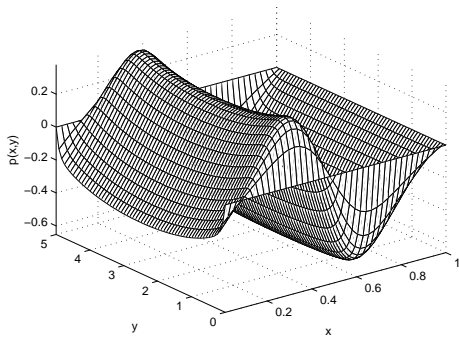


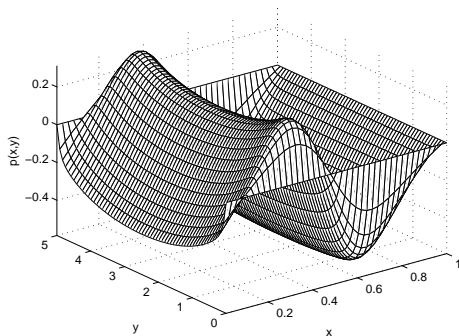
Figure: Influence du nombre de Deborah

Effets tridimensionnels



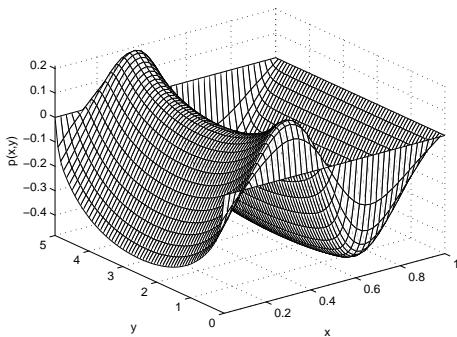
Profil de pression pour $r = 0.0$

Effets tridimensionnels



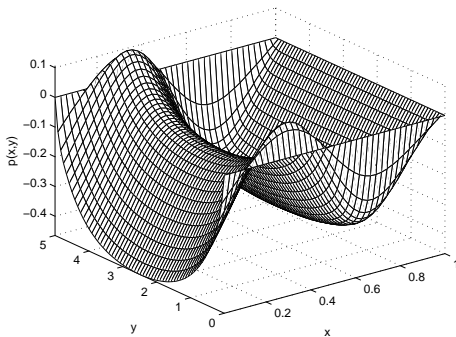
Profil de pression pour $r = 0.2$

Effets tridimensionnels



Profil de pression pour $r = 0.5$

Effets tridimensionnels



Profil de pression pour $r = 0.8$