Décomposition de Littlewood Paley Régularité pour l'équation homogène de Landau

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE D'ORLÉANS ($\mathcal{MAPMO}$)

CANUM 2006 RENNES

PAR

MOUHAMAD EL SAFADI

`mouhamad.el_safadi@univ-orleans.fr`

PLAN

PLAN

- Equation de Landau (homogène) : Structure.
- Décomposition de Littlewood Paley: Espaces de Sobolev avec poids.
- Application de la Décomposition de Littlewood Paley à la régularité globale pour l'équation homogène de Landau.

Equation de Landau

Equation de Landau

- Forme de l'équation de Landau homogène:

$$\partial_t f = \overline{a}_{\omega\omega'} \partial_{\omega\omega'} f - \overline{c} f$$

$$\overline{a}_{\omega\omega'} = a_{\omega\omega'} * f,\ \overline{c} = c * f,\ c = \partial_{\omega\omega'} a_{\omega\omega'}.$$

- $f(t,v) \geq 0$ la densité des particules, dépend du temps $t \in \mathbb{R}^+$ et de la vitesse $v \in \mathbb{R}^N$.

Equation de Landau

- Forme de l'équation de Landau homogène:

$$\partial_t f = \overline{a}_{\omega\omega'}\partial_{\omega\omega'} f - \overline{c} f$$

$$\overline{a}_{\omega\omega'} = a_{\omega\omega'} * f,\ \overline{c} = c * f,\ c = \partial_{\omega\omega'} a_{\omega\omega'}.$$

- $f(t,v) \geq 0$ la densité des particules, dépend du temps $t \in \mathbb{R}^+$ et de la vitesse $v \in \mathbb{R}^N$.
- a, une matrice positive symétrique

$$(a_{\omega\omega'}(z))_{1\leq\omega,\omega'\leq N} = [\delta_{\omega\omega'} - \frac{z_\omega z_{\omega'}}{|z|^2}] \mid z \mid^2 \chi(\mid z \mid),$$

tel que χ est une fonction régulière positive quelconque.

Equation de Landau

- Forme de l'équation de Landau homogène:

$$\partial_t f = \overline{a}_{\omega\omega'} \partial_{\omega\omega'} f - \overline{c} f$$

$$\overline{a}_{\omega\omega'} = a_{\omega\omega'} * f,\ \overline{c} = c * f,\ c = \partial_{\omega\omega'} a_{\omega\omega'}.$$

- $f(t,v) \geq 0$ la densité des particules, dépend du temps $t \in \mathbb{R}^+$ et de la vitesse $v \in \mathbb{R}^N$.
- a, une matrice positive symétrique

$$(a_{\omega\omega'}(z))_{1 \leq \omega, \omega' \leq N} = [\delta_{\omega\omega'} - \frac{z_\omega z_{\omega'}}{|z|^2}] \mid z \mid^2 \chi(\mid z \mid),$$

  tel que χ est une fonction régulière positive quelconque.
- Adoptons, sans confusion, l'équation de Landau sous la forme

$$\partial_t f = \overline{a} \nabla^2 f - \overline{c} f,\ c = \nabla^2 a.$$

Equation de Landau

Equation de Landau

- **Hypothèse** (Potentiel dur $0 < \gamma \leq 1$): On suppose χ satisfaite les bornes

$$c(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \leq \chi(|z|) \leq C_0(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}},$$

$$|\nabla^\beta(\chi(|z|))| \leq C_\beta(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}-\beta} \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{N},$$

tel que C_β constante positive, dépend de la variable β.

Equation de Landau

- **Hypothèse** (Potentiel dur $0 < \gamma \leq 1$): On suppose χ satisfaite les bornes

$$c(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \leq \chi(|z|) \leq C_0(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}},$$

$$|\nabla^\beta(\chi(|z|))| \leq C_\beta(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}-\beta} \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{N},$$

tel que C_β constante positive, dépend de la variable β.

- Conversation de la masse.
- Décroissance de l'énergie et de l'entropie.
- Propagation des moments (Desv,Vill).

Théorème: Régularité

Théorème: Régularité

- Théorème:
  Soit $f_0 \in L\text{log}L(\mathbb{R}^N)$, avec des moments d'ordre $2+\delta$ pour $\delta > 0$.
  Soit f une solution faible de l'équation de Landau, avec les bornes sur χ, les conservations des moments et l'entropie.
  Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}^+,\ p \in \mathbb{R}^+,\ t > 0$,

$$(1+|v|^2)^{\frac{p}{2}} f(t) \in H^s(\mathbb{R}^N).$$

Décomposition de LittlewoodPaley

Décomposition de LittlewoodPaley

- $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ fonctions régulières telles que:

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ |\ \xi \ | \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{k-1} \leq |\ \xi \ | \leq 2^{k+1}\} \text{ pour tout } k \geq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Décomposition de LittlewoodPaley

- $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ fonctions régulières telles que:

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ |\ \xi\ | \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{k-1} \leq |\ \xi\ | \leq 2^{k+1}\} \text{ pour tout } k \geq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- On définit les opérateurs p_k, pour $k \geq 0$, par

$$\widehat{p_k f}(\xi) = \psi_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Décomposition de LittlewoodPaley

- $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ fonctions régulières telles que:

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ |\ \xi\ | \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{k-1} \leq |\ \xi\ | \leq 2^{k+1}\} \text{ pour tout } k \geq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- On définit les opérateurs p_k, pour $k \geq 0$, par

$$\widehat{p_k f}(\xi) = \psi_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

- Décomposition de Littlewood-Paley:

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k f \text{ pour toute } f \in \mathcal{S}'.$$

Décomposition de LittlewoodPaley

- $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ fonctions régulières telles que:

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ |\ \xi\ | \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{k-1} \leq |\ \xi\ | \leq 2^{k+1}\} \text{ pour tout } k \geq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- On définit les opérateurs p_k, pour $k \geq 0$, par

$$\widehat{p_k f}(\xi) = \psi_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

- Décomposition de Littlewood-Paley:

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k f \text{ pour toute } f \in \mathcal{S}'.$$

- Lemme : Pour tout $s \geq 0$, $p \geq 0$,

$$||f||^2_{H^s_p} \sim \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{ks}2^{jp}||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2}.$$

Preuve: Simplification

Preuve: Simplification

- Multiplions par ψ_j, appliquons l'opérateur p_k, multiplions par $p_k(\psi_j f)$ et intégrons en v:

$$\partial_t \, || \, p_k(\psi_j f) \, ||_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_v \overline{a} \psi_j \nabla p_k(\psi_j f) \nabla p_k(\psi_j f) dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_v [\, \nabla^2 p_k, \overline{a} \psi_j](\psi_j f) p_k(\psi_j f) dv$$

$$- \int_v [\, \nabla p_k, \, \overline{a} \nabla \psi_j](\psi_j f) p_k(\psi_j f) dv - \int_v \overline{a} \nabla \psi_j \nabla p_k(\psi_j f) p_k(\psi_j f) dv$$

$$- \frac{1}{2} \int_v [\, p_k, \, \overline{c} \psi_j](\psi_j f) p_k(\psi_j f) dv - \frac{1}{2} \int_v (\overline{c} \psi_j) p_k(\psi_j f) p_k(\psi_j f) dv.$$

Preuve: Estimations

Preuve: Estimations

- Minoration (Ellipticité):

$$\int_v \overline{a}\psi_j \nabla p_k(\psi_j f)\nabla p_k(\psi_j f)dv \geq K\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}||\nabla p_k(\psi_j f)||_{L^2}^2.$$

K: dépend de moment, énergie et entropie de f.

avec $\mathcal{C}_j = (1+2^{2j})$.

Preuve: Estimations

- Minoration (Ellipticité):

$$\int_v \overline{a}\psi_j \nabla p_k(\psi_j f)\nabla p_k(\psi_j f)dv \geq K\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}||\nabla p_k(\psi_j f)||_{L^2}^2.$$

K: dépend de moment, énergie et entropie de f.

avec $\mathcal{C}_j = (1+2^{2j})$.

- Inégalité Cauchy Schwartz $\Rightarrow$ Inégalité différentielle

$$\partial_t||p_k(\psi_j f)||_{L^2}^2 + \mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}||\nabla p_k(\psi_j f)||_{L^2}^2 \leq C\frac{\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{(r-1)k}}2^{\frac{Nk}{2}}||p_k(\psi_j f)||_{L^2}$$

$$+C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+2}{2}}\ ||p_k(\psi_j f)||_{L^2}^2.$$

Preuve: Inégalité différentielle

Preuve: Inégalité différentielle

- Inégalité Bernstein: $||p_k(\psi_j f)||_{L^2} \leq C 2^{\frac{Nk}{2}} ||p_k(\psi_j f)||_{L^1}$.

Preuve: Inégalité différentielle

- Inégalité Bernstein: $||p_k(\psi_j f)||_{L^2} \le C 2^{\frac{Nk}{2}} ||p_k(\psi_j f)||_{L^1}$.
- Divisons par 2^{kN}, pour $k \ge 0,\ j \ge 0$

$$\partial_t U_{kj}(t) + \mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}} 2^{2k} U_{kj}(t) \le \mathcal{K}_{kj}^r(t) + C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+2}{2}}\ U_{kj}(t),$$

$$\begin{cases} U_{kj}(t) = \dfrac{||p_k(\psi_j f)(t)||_{L^2}^2}{2^{kN}},\ \mathcal{C}_j = (1+2^{2j}) \\ \text{et } \mathcal{K}_{kj}^r(t) = C\dfrac{\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{rk}}\ ||\ p_k(\psi_j f)(t)\ ||_{L^1}\ . \end{cases}$$

Preuve: Régularité

Preuve: Régularité

- Récurrence sur q: pour $\beta < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{kj}^{q\beta} U_{kj}(t) < C_{t_0},$$

où C_{t_0} dépend des moments de f d'ordre $\frac{\gamma+2+\gamma q\beta}{2}$.

Preuve: Régularité

- Récurrence sur q: pour $\beta < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{kj}^{q\beta} U_{kj}(t) < C_{t_0},$$

  où C_{t_0} dépend des moments de f d'ordre $\frac{\gamma+2+\gamma q\beta}{2}$.

- $f \in H_p^s$ pour tout $s > 0,\ p \geq \frac{\gamma}{2\beta}(s+N)$ CQFD.