Couplage du système de la dynamique des gaz et d'un système de relaxation associé

Filipa Caetano

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie - Paris VI

Canum - 1er juin 2006

Motivation

Modélisation de systèmes complexes, où chaque composante est décrite par un modèle spécifique.

$\longrightarrow$ Modélisation d'écoulements eau-vapeur dans un réacteur nucléaire.

Problèmes de transition de phase.

Présentation du problème

Couplage système de la dynamique des gaz/système de relaxation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{cases}$$

$$x < 0,\ t > 0,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\rho u) = \\ \qquad = \lambda_0\rho(\alpha_{eq}(\rho) - \alpha), \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{cases}$$

$$x > 0,\ t > 0.$$

Pour $x < 0$, $p = p_L(\rho, \varepsilon)$, et pour $x > 0$, $p = p_R(\alpha, \rho, \varepsilon)$.

Un modèle simple de transition de phase :

Le **système homogène à l'équilibre**

$\longrightarrow$ Système de la dynamique des gaz avec loi de pression

$$p = p_E(\rho, \varepsilon) = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)\rho_1^*\varepsilon = (\gamma_2 - 1)\rho_2^*\varepsilon, & \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^*, \\ (\gamma_2 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \geq \rho_2^*. \end{cases}$$

Approximation par relaxation :

Le **système homogène de relaxation (HRM)**

$$p = p_R(\alpha, \rho, \varepsilon) = (\gamma_1\alpha + \gamma_2(1-\alpha) - 1)\rho\varepsilon.$$

$$\alpha_{eq}(\rho) \; : \; p_R(\alpha_{eq}(\rho), \rho, \varepsilon) = p_E(\rho, \varepsilon).$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\rho u) = \lambda_0\rho(\alpha_{eq}(\rho) - \alpha).$$

Cas étudié ici :

$x < 0$: Système de la dynamique des gaz avec loi d'état classique

$$p = p(\rho, \varepsilon)$$

$x > 0$: Système HRM.

La relation entre les deux systèmes est donnée par

$$p(\rho, \varepsilon) = p_R(\alpha_{eq}(\rho), \rho, \varepsilon).$$

Système HRM : système hyperbolique, de valeurs propres

$$\lambda_1(U) = u - c < \lambda_2(U) = \lambda_3(U) = u < \lambda_4(U) = u + c.$$

$c = c(\alpha, \rho, p) = \sqrt{\frac{(\gamma_1 \alpha + \gamma_2 (1-\alpha))p}{\rho}}$ est la vitesse du son.

Définition du couplage - le cas général

Le cas des systèmes de même taille :

$U_L \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	$U_R \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
$\frac{\partial U_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_L(U_L) = S_L(U_L),$	$\frac{\partial U_R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_R(U_R) = S_R(U_R),$
$x < 0, \; t > 0,$	$x > 0, \; t > 0.$

Idée de la méthode du **couplage par état** - Godlewski et Raviart (05) :

$\longrightarrow$ imposer à l'interface de couplage la condition

$$\text{“}U_L(0^-, t) = U_R(0^+, t)\text{”}, \quad \forall\, t > 0.$$

Dubois et LeFloch (88) :

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} U_L(0^-,t) \in \mathcal{O}_L(U_R(0^+,t)), & \forall\ t > 0, \\ U_R(0^+,t) \in \mathcal{O}_R(U_L(0^-,t)), & \forall\ t > 0, \end{cases}$$

où, pour $a, b \in \Omega$

$$\mathcal{O}_L(a) = \big\{ W_L(0^-, U, a) \ : \ U \in \Omega \big\}$$

et

$$\mathcal{O}_R(b) = \big\{ W_R(0^+, b, U) \ : \ U \in \Omega \big\},$$

$W_L(\frac{x}{t}, U_g, U_d)$ et $W_R(\frac{x}{t}, U_g, U_d)$ désignant, respectivement, la solution du problème de Riemann pour les systèmes homogènes associés aux systèmes de gauche et de droite, de donnée initiale

$$\begin{cases} U_g, & x < 0, \\ U_d, & x > 0. \end{cases}$$

Le **couplage par état modifié** consiste à coupler en d'autres systèmes de variables.

Si $V_L = \varphi_L(U_L)$ et $V_R = \varphi_R(U_R)$, on impose désormais la condition

$$"V_L(0^-, t) = V_R(0^+, t)", \quad \forall\, t > 0.$$

Le cas du couplage du système d'Euler 3×3 et du système HRM

Nous faisons un couplage dans les variables suivantes :

$$V_L = (\rho, u, p) \text{ et } V_R = (\alpha, \rho, u, p).$$

$$V_L \in \Omega_{V,L} = \Big\{(\rho, u, p) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \rho > 0,\ p > 0\Big\},$$
$$V_R \in \Omega_{V,R} = \Big\{(\alpha, \rho, u, p) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \alpha \in [0,1], \rho > 0,\ p > 0\Big\}.$$

$$\mathcal{R} : V_L = (\rho, u, p) \longrightarrow V_R = (\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)$$
$$\mathcal{P} : V_R = (\alpha, \rho, u, p) \longrightarrow V_L = (\rho, u, p).$$

Les conditions de couplage s'écrivent

$$\big(\rho, u, p\big)(0^-, t) \in \tilde{\mathcal{O}}_L\Big(\big(\rho, u, p\big)(0^+, t)\Big), \quad \forall\, t > 0,$$
$$\big(\alpha, \rho, u, p\big)(0^+, t) \in \tilde{\mathcal{O}}_R\Big(\big(\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p\big)(0^-, t)\Big), \quad \forall\, t > 0.$$

Pour $a \in \Omega_{V,L}$ et $b \in \Omega_{V,R}$,

$$\tilde{\mathcal{O}}_L(a) = \big\{ Z_L(0^-, V, a) \, : \, V \in \Omega_{V,L} \big\},$$

et

$$\tilde{\mathcal{O}}_R(b) = \big\{ Z_R(0^+, b, V) \, : \, V \in \Omega_{V,R} \big\}.$$

$Z_L(\frac{x}{t}, V_g, V_d)$ et $Z_R(\frac{x}{t}, V_g, V_d)$ sont respectivement les solutions du problème de Riemann pour le système d'Euler et pour le système HRM homogène, de donnée initiale

$$\begin{cases} V_g, & x < 0, \\ V_d, & x > 0. \end{cases}$$

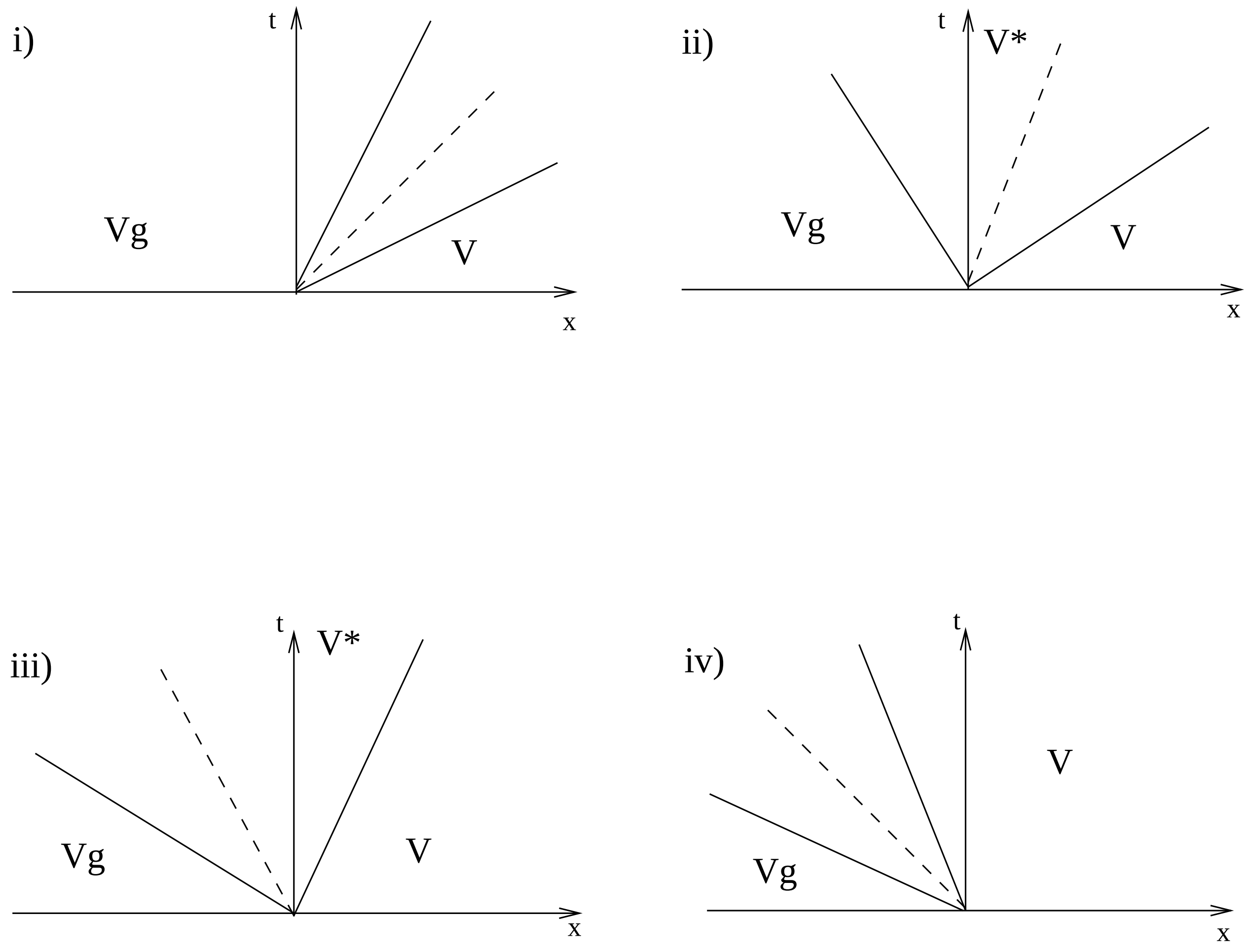
Interprétation géométrique des conditions de couplage

Objectif :
Étant donné $V_d=(\rho_d,u_d,p_d)\in\Omega_{V,L}$ et $V_g=(\alpha_g,\rho_g,u_g,p_g)\in\Omega_{V,R}$, décrire les ensembles $\tilde{\mathcal{O}}_L(V_d)$ et $\tilde{\mathcal{O}}_R(V_g)$.

L'ensemble $\tilde{\mathcal{O}}_R(V_g)$.

$$\tilde{\mathcal{O}}_R(V_g) = \left\{ Z_R(0^+,V_g,V) \,:\, V\in\Omega_{V,R}\right\}.$$

Soit $Z_R(\frac{x}{t},V_g,V)$ une solution du problème de Riemann pour le système HRM homogène. 4 situations sont possibles :


i)
t
Vg
V
x
ii)
t
V*
Vg
V
x
iii)
t
V*
Vg
V
x
iv)
t
V
Vg
x

Pour décrire l'ensemble $\tilde{\mathcal{O}}_R(V_g)$ il est nécessaire :

- Étudier les courbes d'onde pour le système HRM ;
- Étudier le signe de la vitesse des ondes.

Soient

$\mathcal{C}_R^1(V_g)$ la courbe des états U que l'on peut relier à V_g, à droite, par une 1−onde admissible ;

$\mathcal{C}_R^{1,-}(V_g)$ la partie de cet ensemble correspondant à des ondes de vitesse négative et $\Pi_R^{1,-}(V_g)$ sa projection dans le plan $u-p$.

Théorème 1. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{O}}_R(V_g)$ est l'union des 4 ensembles*

$$\{V_g\} \cup \mathcal{C}_R^{1,-}(V_g) \cup \mathcal{S}^-(V_g) \cup \mathcal{V}^-(V_g),$$

où

$$\mathcal{S}^-(V_g) = \Big\{(\alpha,\rho,u,p)\ :\ (u,p) \in \Pi_R^{1,-}(V_g),\ u \leq 0,\ \alpha \in [0,1],\ \rho > 0\Big\}$$

et $\mathcal{V}^-(V_g)$ est un volume de l'espace à 4 dimensions tel que

$$\mathcal{V}^-(V_g) \subseteq \big\{(\alpha,\rho,u,p)\ :\ u \leq 0\big\}.$$

L'ENSEMBLE $\tilde{\mathcal{O}}_L(V_d)$.

De manière analogue, on considère
$\mathcal{C}_L^3(V_d)$ l'ensemble des états U que l'on peut relier à V_d, à gauche, par une $3-$onde admissible ;
$\mathcal{C}_L^{3,+}(V_d)$ la partie de cet ensemble correspondant à des ondes de vitesse positive et $\Pi_L^{3,+}(V_d)$ sa projection dans le plan $u-p$.

Théorème 2. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{O}}_L(V_d)$ est l'union des 4 ensembles*

$$\{V_d\} \cup \mathcal{C}_L^{3,+}(V_d) \cup \mathcal{S}^+(V_d) \cup \mathcal{V}^+(V_d),$$

où

$$\mathcal{S}^+(V_d) = \Big\{(\rho, u, p)\ :\ (u,p) \in \Pi_L^{3,+}(V_d),\ u \geq 0,\ \rho > 0\Big\}$$

et $\mathcal{V}^+(V_d)$ est un volume de l'espace tel que

$$\mathcal{V}^+(V_d) \subseteq \big\{(\rho, u, p) \in \Omega_{V,L}\ :\ u \geq 0\big\}.$$

Le problème de Riemann couplé

Objectif :

Résoudre le problème couplé avec une donnée de Riemann

$$\begin{cases} V_g = (\rho_g, u_g, p_g), & x < 0, \\ V_d = (\alpha_d, \rho_d, u_d, p_d), & x > 0. \end{cases}$$

On se restreint aux solutions V "continues" et à l'équilibre à l'interface, i. e.,

$$V = V\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} (\rho, u, p)(\frac{x}{t}), & \frac{x}{t} < 0, \\ (\alpha, \rho, u, p)(\frac{x}{t}), & \frac{x}{t} > 0, \end{cases}$$

tels que

$$(\alpha, \rho, u, p)(0^+) = (\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-).$$

Soient

$$\mathcal{V}_L(V_g) = \big\{ Z_L(0^-, V_g, V) \, : \, V \in \Omega_{V,L} \big\},$$

$$\mathcal{V}_R(V_d) = \big\{ Z_R(0^+, V, V_d) \, : \, V \in \Omega_{V,R} \big\}.$$

- Si $V(\frac{x}{t})$ est une solution continue du problème de Riemann couplé, alors $V(0^-) \in \mathcal{V}_L(V_g)$ et $V(0^+) \in \mathcal{V}_R(V_g)$;
- Si $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0)$ est tel que $V_0 \in \mathcal{V}_L(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\rho_0), V_0) \in \mathcal{V}_R(V_d)$, alors on peut construire une solution continue du problème de Riemann couplé qui vaut V_0 en $\frac{x}{t} = 0^-$ et $(\alpha_{eq}(\rho_0), V_0)$ en $\frac{x}{t} = 0^+$.

Les ensembles $\mathcal{V}_L(V_g)$ et $\mathcal{V}_R(V_d)$.

Il existe des ensembles $\hat{\mathcal{C}}_R^{4,+}(V_d)$, $\hat{\mathcal{S}}^+(V_d)$, $\hat{\mathcal{V}}^+(V_d)$ *et* $\hat{\mathcal{C}}_L^{1,-}(V_g)$, $\hat{\mathcal{S}}^-(V_g)$, $\hat{\mathcal{V}}^-(V_g)$ *tels que*

$$\mathcal{V}_R(V_d) = \{V_d\} \cup \hat{\mathcal{C}}_R^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}^+(V_d),$$

et

$$\mathcal{V}_L(V_g) = \{V_g\} \cup \hat{\mathcal{C}}_L^{1,-}(V_g) \cup \hat{\mathcal{S}}^-(V_g) \cup \hat{\mathcal{V}}^-(V_g),$$

avec

$$\hat{\mathcal{S}}^+(V_d),\ \hat{\mathcal{V}}^+(V_d) \subseteq \Big\{(\alpha, \rho, u, p)\ :\ u > 0\Big\}$$

et

$$\hat{\mathcal{S}}^-(V_g),\ \hat{\mathcal{V}}^-(V_g) \subseteq \Big\{(\rho, u, p)\ :\ u < 0\Big\}.$$

<u>Résolution du problème de Riemann couplé</u>.

i. Si $(\alpha_{eq}(\rho_g), V_g) \in \mathcal{V}_R(V_d) \longrightarrow$ La solution du problème de Riemann couplé coïncide avec la solution du problème de Riemann pour le système HRM de donnée initiale $\begin{cases} (\alpha_{eq}(\rho_g), V_g), & x < 0 \\ V_d, & x > 0 \end{cases}.$

ii. Si $(\rho_0, u_0, p_0) \in \hat{\mathcal{C}}_L^{1,-}(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\rho_0), \rho_0, u_0, p_0) \in \hat{\mathcal{C}}_R^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}^+(V_d) \longrightarrow$ Il existe une solution du problème de Riemann couplé qui est constituée d'une $1-$onde gauche et de une, deux ou trois ondes droites.

(Conclusions analogues pour les conditions symétriques).