
Couplage numérique de l'amortissement Landau et de l'amplification Raman.

Belaouar Radoin

Mathématiques Appliquées de Bordeaux, Université Bordeaux 1, CEA-CESTA,
belaouar@math.u-bordeaux1.fr

Collaborations:

CEA: G. Gallice.

Bordeaux 1: T. Colin, C. Galusinski.

Plan

1. Contexte physique et motivations.
2. Le système.
3. Schéma numérique et conditions aux limites.
4. Résultats numériques.

Motivation et contexte physique.

But: Faire fusionner deux combustibles afin de libérer une énergie importante.

Méthode: Focaliser plusieurs faisceaux laser sur la cible pour activer la fusion.

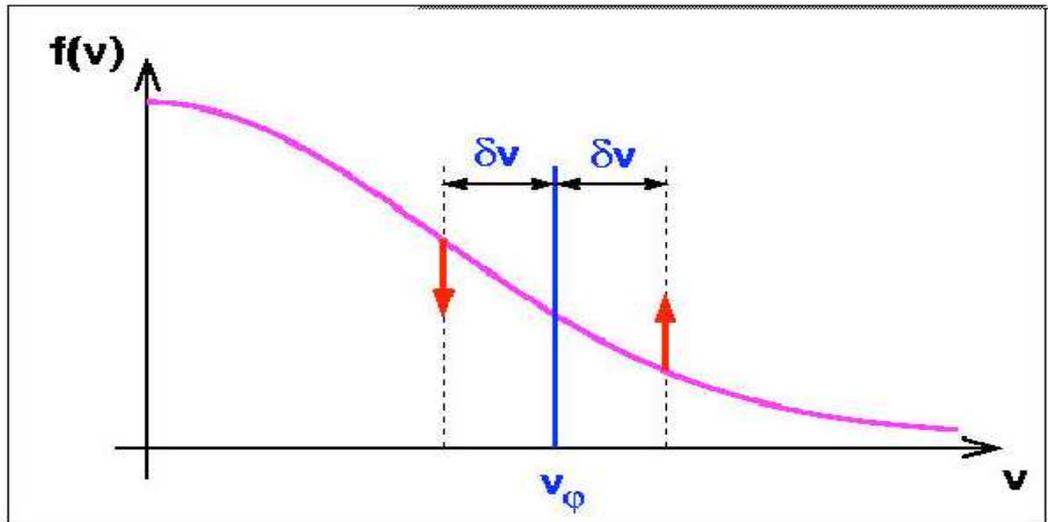
=> Création d'un **plasma**: interaction non-linéaire avec le laser.

Problème: Description des phénomènes non-linéaires qui vont nuire au rendement de la réaction.

Amortissement Landau : description cinétique.

Effet Landau : déséquilibre cinétique.

- Champ oscillant $E = E_0 \exp(-i(\omega t - k_1 x))$, $v_\phi = \omega/k_1$
→ Interaction avec les particules t.q. $v_p \in [v_\phi - \delta v, v_\phi + \delta v]$.



- Transfert d'énergie (onde-particules).
- Accélération de particules (en général...!).
- **Préchauffage de la cible néfaste pour le rendement de la réaction.**

2.1 Le système Raman-Landau 1D.

$$i (\partial_t A_C + v_C \partial_y A_C) + \alpha_C \partial_y^2 A_C = \delta n A_C - \beta_C (\partial_y E) A_R e^{-i(k_1 y - \omega_1 t)},$$

$$i (\partial_t A_R + v_R \partial_y A_R) + \alpha_R \partial_y^2 A_R = \delta n A_R - \beta_R (\partial_y \cdot E^*) A_C e^{i(k_1 y - \omega_1 t)},$$

$$i (\partial_t E + \nu \star E) + \alpha_E \partial_y^2 E = \delta n E + \beta_E \partial_y \left(A_R^* A_C e^{i(k_1 y - \omega_1 t)} \right),$$

$$(\partial_t^2 - c_s^2 \partial_y^2) \delta n = \alpha_n \partial_y^2 \left(|E|^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} (|A_C|^2 + |A_R|^2) \right),$$

$$\hat{\nu}(\xi, t) = -\frac{\gamma}{\xi|\xi|} \partial_v F_e(t, v = \frac{\omega_{pe}}{\xi})$$

$$\partial_t F_e - d_e \partial_v \left(\frac{1}{|v|} \left| \hat{E} \right|^2 \left(\xi = \frac{\omega_{pe}}{v} \right) \partial_v F_e \right) = 0, \quad v \in \Omega_v.$$

3. Schéma numérique.

Quelques sont les difficultés ?

- Les équations décrivant l'amplification Raman sont posés dans l'espace physique et celles de l'effet Landau dans l'espace de Fourier. => Stratégie : splitting en temps.

3. Schéma numérique.

Quelques sont les difficultés ?

- Les équations décrivant l'amplification Raman sont posés dans l'espace physique et celles de l'effet Landau dans l'espace de Fourier. \Rightarrow Stratégie : splitting en temps.
- Conditions aux limites absorbantes pour A_C , A_R et δn .

3. Schéma numérique.

Quelques sont les difficultés ?

- Les équations décrivant l'amplification Raman sont posés dans l'espace physique et celles de l'effet Landau dans l'espace de Fourier. => Stratégie : splitting en temps.
- Conditions aux limites absorbantes pour A_C , A_R et δn .
- La condition de résonance à trois ondes.

Etape 1: La diffusion des électrons

On veut résoudre

$$\partial_t F_e - \partial_v \left(\frac{1}{|v|} \left| \widehat{E} \right|^2 \left(\xi = \frac{\omega_{pe}}{v} \right) \partial_v F_e \right) = 0$$

Il est plus commode d'utiliser $H(t, \xi) = F_e(t, v = \frac{\omega_{pe}}{\xi})$.

Etape 1: La diffusion des électrons

$$\frac{1}{\delta t} (H_{j+\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{j+\frac{1}{2}}^k) + (AH)_{j+\frac{1}{2}}^{k+1} = 0,$$

avec

$$(AH)_{j+\frac{1}{2}}^k = -\frac{\xi_{j+\frac{1}{2}}^2}{\xi_{j+1} - \xi_j} \left[\beta_{j+1}^{k-1} \frac{H_{j+\frac{3}{2}}^k - H_{j+\frac{1}{2}}^k}{\xi_{j+\frac{3}{2}} - \xi_{j+\frac{1}{2}}} - \beta_j^{k-1} \frac{H_{j+\frac{1}{2}}^k - H_{j-\frac{1}{2}}^k}{\xi_{j+\frac{1}{2}} - \xi_{j-\frac{1}{2}}} \right],$$

Ceci nous donne

$$\widehat{\nu}_j^{k+1} = \operatorname{sgn}(\xi_j) \frac{H_{j+\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\xi_{j+\frac{1}{2}} - \xi_{j-\frac{1}{2}}}.$$

Etape 2 et 3: L'amplification Raman et l'effet Landau

Etape 2 : on résoud le couplage $(A_C, A_R, E, \delta n)$ sans l'effet Landau (M.Colin, T.Colin).

- Schéma de type **Crank-Nicholson** pour la partie linéaire.
- Schéma de **relaxation** pour les termes quasilineaires.
- Schéma de Glassey pour δn :

Etape 3 : on résoud $\partial_t E + \nu * E = 0$ à l'aide d'une transformée de Fourier.

$$\widehat{E}(t^{k+1}, \xi_j) \approx \widehat{\widetilde{E}}(\xi_j) \exp\left(-\frac{\delta t}{2}(\widehat{\nu}_j^{k+1} + \widehat{\nu}_j^k)\right).$$

Les conditions aux limite sur A_C , A_R , et δn

Pour cela, on considère :

$$i(\partial_t u + v \partial_y u) + \alpha \partial_y^2 u = nu, \quad 0 < y < 1,$$

$$\partial_t^2 \delta n - v_s^2 \partial_y^2 \delta n = \partial_y^2 (|u|^2), \quad 0 < y < 1.$$

Point clé : $v \approx 1$, $\alpha \approx 10^{-3}$, $v_s \approx 10^{-2}$.

Les conditions aux limite sur A_C , A_R , et δn

Pour cela, on considère :

$$i(\partial_t u + v \partial_y u) + \alpha \partial_y^2 u = nu, \quad 0 < y < 1,$$

$$\partial_t^2 \delta n - v_s^2 \partial_y^2 \delta n = \partial_y^2 (|u|^2), \quad 0 < y < 1.$$

Point clé : $v \approx 1$, $\alpha \approx 10^{-3}$, $v_s \approx 10^{-2}$.

$$\partial_t^2 \delta n - v_s^2 \partial_y^2 \delta n = \partial_y^2 |u(0, y - vt)|^2, \quad 0 < y < 1.$$

$$\delta n(0, y) = 0, \quad \partial_t \delta n(0, y) = 0.$$

$$\delta n = \alpha |u(0, y - v_s t)|^2 + \beta |u(0, y + v_s t)|^2 + \gamma |u(0, y - vt)|^2.$$

Il suffit alors d'imposer $\partial_t \delta n + v \partial_y \delta n = 0$ au point $y = 1$.

Les conditions aux limite sur A_C , A_R , et δn

$$(a) \quad i (\partial_t u + v \partial_y u) + \varepsilon \partial_y^2 u = 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$(b) \quad u(t, 0) = 0,$$

$$(c) \quad \partial_t u + v \partial_y u = 0 \quad y = 1.$$

Les conditions aux limite sur A_C , A_R , et δn

$$(a) \quad i(\partial_t u + v\partial_y u) + \varepsilon \partial_y^2 u = 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$(b) \quad u(t, 0) = 0,$$

$$(c) \quad \partial_t u + v\partial_y u = 0 \quad y = 1.$$

Prop. Toute solution u de (a)-(c) vérifie

$$\frac{d}{dt} \int |\partial_y u|^2 dy = -v (|\partial_y u(t, 0)|^2 + |\partial_y u(t, 1)|^2).$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} \left(\sum_{j=2}^{N-1} \left| \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_j^{k+1}}{\delta y} \right|^2 - \sum_{j=2}^{N-1} \left| \frac{u_{j+1}^k - u_j^k}{\delta y} \right|^2 \right) =$$
$$-v \left(\left| \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{\delta y} \right|^2 + \left| \frac{\tilde{u}_N - \tilde{u}_{N-1}}{\delta y} \right|^2 \right).$$

Illustration numérique.

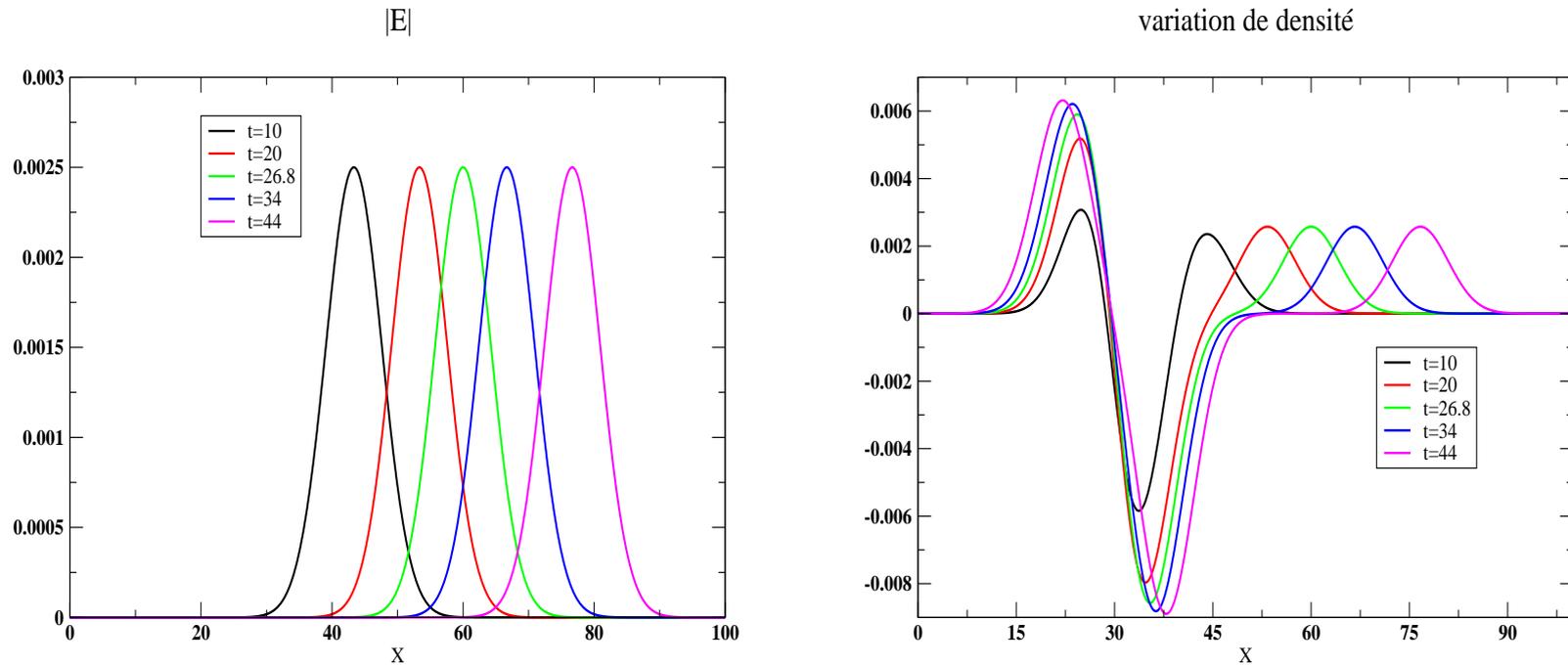


Figure 1: Evolution de $|E|(y)$ et $\delta n(y)$ au cours du temps

Illustration numérique.

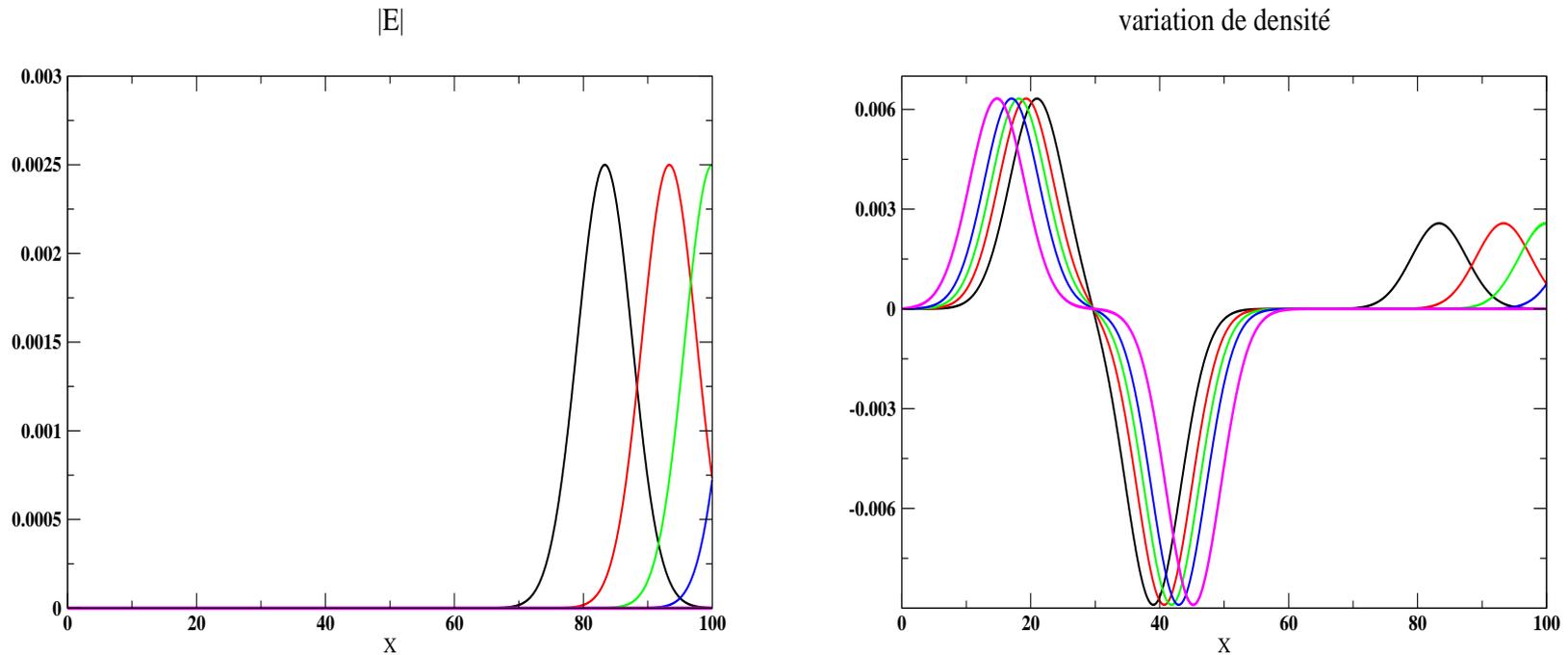


Figure 2: Evolution de $|E|(y)$ et $\delta n(y)$ au cours du temps

Conditions aux limites.

$$\partial_t A_C + v_0 \partial_y A_C = 0, \quad y = L,$$

$$\partial_t A_R + v_R \partial_y A_R = 0, \quad y = 0,$$

$$E(0) = E(L),$$

$$\partial_t \delta n + v_0 \partial_y \delta n = 0, \quad y = L,$$

$$\partial_t \delta n + v_R \partial_y \delta n = 0, \quad y = 0.$$

5. La condition de résonance.

Si on fixe A_C et A_R , l'équation des ondes plasma devient

$$i\partial_t E + \alpha\partial_y^2 E = A e^{i(k_1 y - \omega_1 t)}$$

dont la solution exacte s'écrit

$$E(t, y) = \begin{cases} A t e^{i(k_1 y - \omega_1 t)} & \text{si } \omega_1 = \alpha k_1^2, \\ \frac{A e^{i k_1 y}}{\omega_1 - \alpha k_1^2} (1 - e^{-i \omega_1 t}) & \text{si } \omega_1 \neq \alpha k_1^2. \end{cases}$$

5. La condition de résonance.

Si on fixe A_C et A_R , l'équation des ondes plasma devient

$$i\partial_t E + \alpha\partial_y^2 E = A e^{i(k_1 y - \omega_1 t)}$$

dont la solution exacte s'écrit

$$E(t, y) = \begin{cases} A t e^{i(k_1 y - \omega_1 t)} & \text{si } \omega_1 = \alpha k_1^2, \\ \frac{A e^{i k_1 y}}{\omega_1 - \alpha k_1^2} (1 - e^{-i \omega_1 t}) & \text{si } \omega_1 \neq \alpha k_1^2. \end{cases}$$

$$i \frac{E_j^{k+1} - E_j^k}{\delta t} + \alpha D_+ D_- \left(\frac{u^{k+1} + u^k}{2} \right)_j = A e^{i(k_1 x_j - \omega_1 t^{k+\frac{1}{2}})}$$

5. La condition de résonance.

Si on fixe A_C et A_R , l'équation des ondes plasma devient

$$i\partial_t E + \alpha\partial_y^2 E = Ae^{i(k_1 y - \omega_1 t)}$$

dont la solution exacte s'écrit

$$E(t, y) = \begin{cases} Ate^{i(k_1 y - \omega_1 t)} & \text{si } \omega_1 = \alpha k_1^2, \\ \frac{Ae^{ik_1 y}}{\omega_1 - \alpha k_1^2} (1 - e^{-i\omega_1 t}) & \text{si } \omega_1 \neq \alpha k_1^2. \end{cases}$$

$$i\frac{E_j^{k+1} - E_j^k}{\delta t} + \alpha D_+ D_- \left(\frac{u^{k+1} + u^k}{2} \right)_j = Ae^{i(k_1 x_j - \omega_1 t^{k+\frac{1}{2}})}$$

$$\text{On choisit } \omega_1 := \omega_{1d} = \frac{2}{\delta t} \arctan \left(\alpha \delta t \frac{1 - \cos(k_1 \delta y)}{\delta y^2} \right).$$

$$\lim_{(\delta y, \delta t) \rightarrow (0,0)} \omega_{1d} = \alpha k_1^2$$

Illustration numérique.

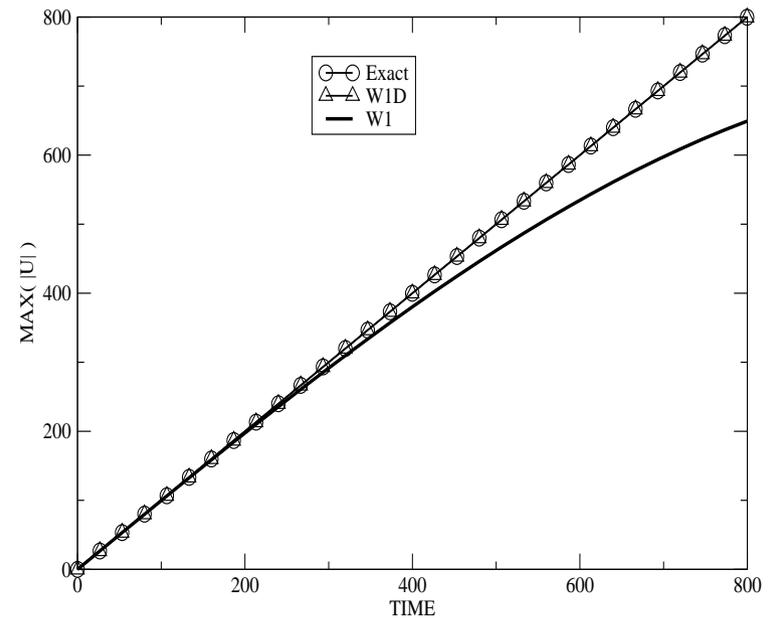
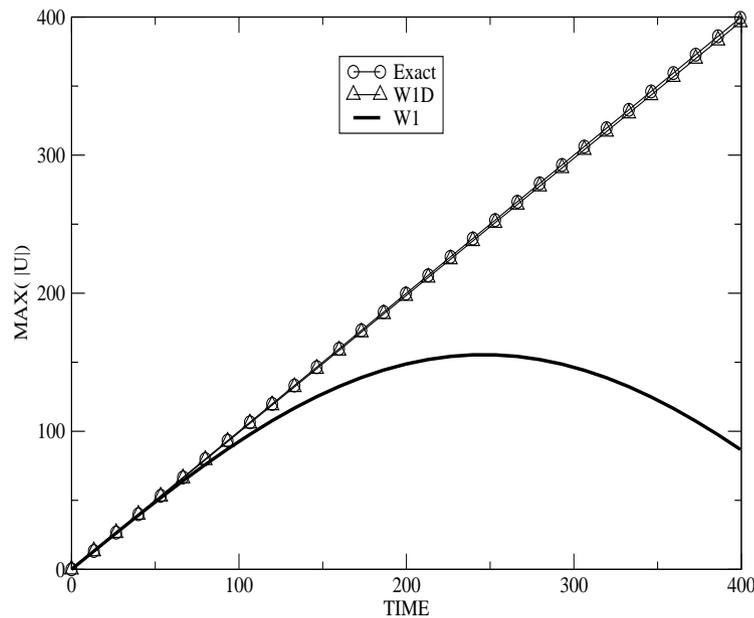


Figure 3: $\max_y(|E|)$ en fonction du temps pour deux types de maillage

Le système complet.

On se donne $k_0 = 2.10^7 \text{ m}^{-1}$, domaine spatial $\Omega = [0, 250\lambda_0]$.

Données initiales : $A_C(0, y) = A_{C0} e^{-\frac{(x-L/3)^2}{2\delta L^2}}$, $A_R(0, y) = 1\% A_C(0, y)$,
 $E(0, y) = 0, \delta n = 0, \partial_t \delta n = 0, F_e(0, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}$.

On cherche k_1, k_R vérifiant la condition de résonance :

$$k_0 = k_R + k_1,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k_R^2 c^2} + \omega_{pe} + \frac{2}{\delta t} \arctan \left(\alpha \delta t \frac{1 - \cos(k_1 \delta y)}{\delta y^2} \right).$$

Illustration numérique.

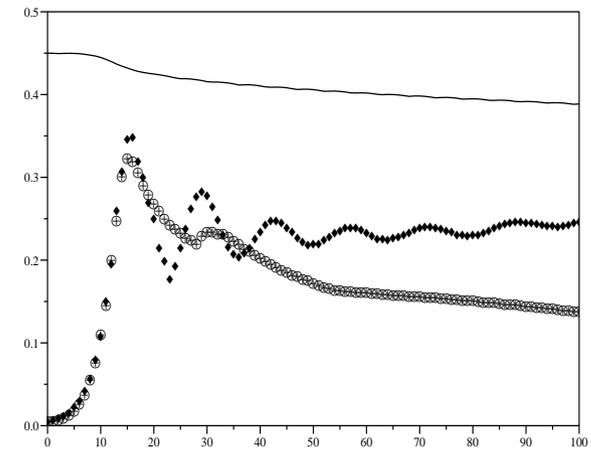
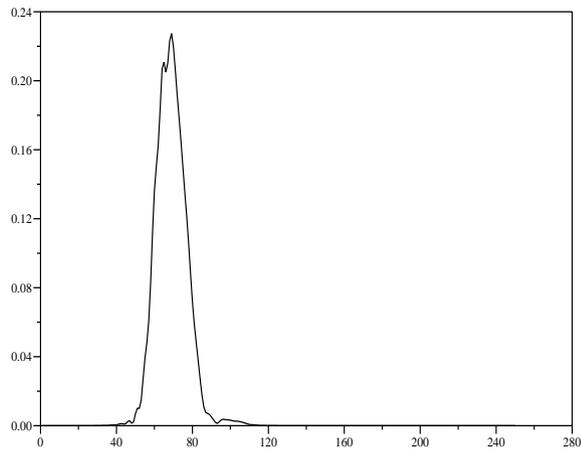
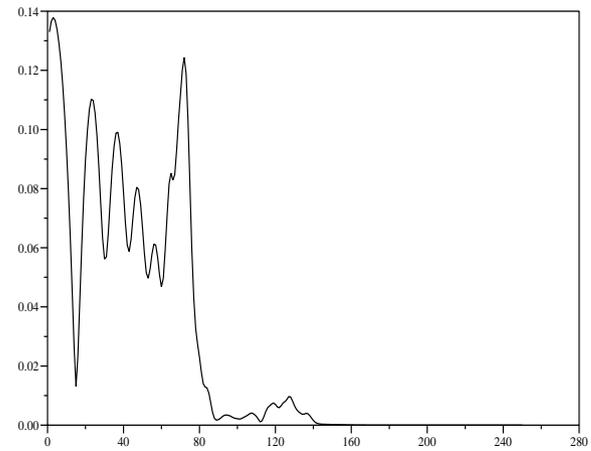
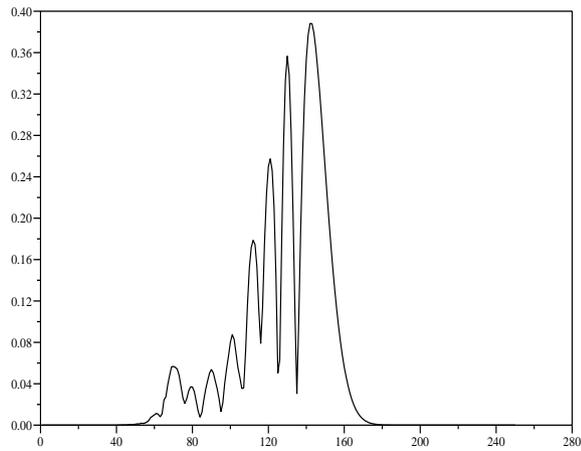


Illustration numérique.

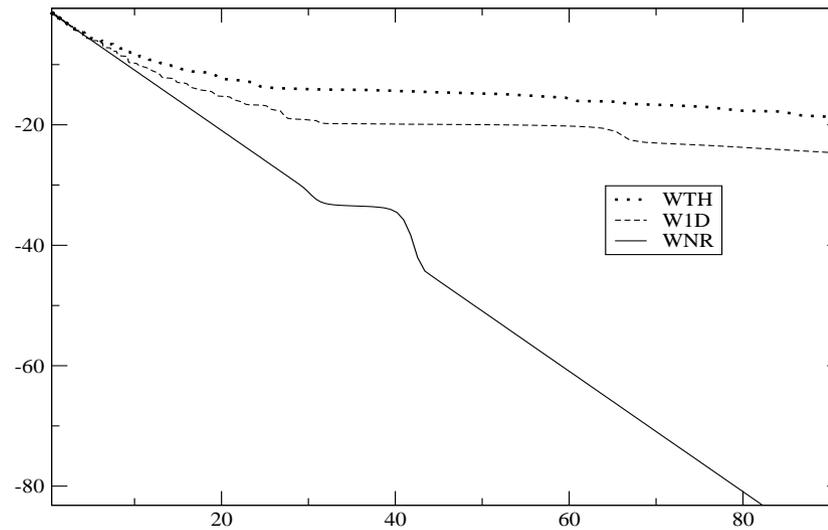


Figure 4: $\log(F_e)$ en fonction de l'énergie cinétique $v^2/2$.