

# Couplage éléments finis - formule intégrale en magnétostatique

**Stéphane Balac**

Institut Camille Jordan (UMR 5208), INSA de Lyon

**Gabriel Caloz**

IRMAR (UMR 6625), Université de Rennes 1

Calcul du champ magnétique généré par un électro-aimant constitué :

- d'un inducteur  $\Omega_s$  parcouru par un courant de densité  $j$  **indépendant du temps**
- d'un noyau ferromagnétique  $\Omega$



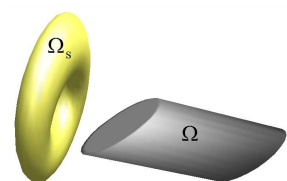
- 1 Formulation du problème de la magnétostatique
- 2 Couplage E.F. - formule de représentation intégrale
- 3 Calcul du champ magnétique

# 1 - Le problème de la magnétostatique

On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  dans les milieux non magnétiques.



- On introduit une loi de comportement (linéaire) pour le noyau ferromagnétique  $\Omega$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

- On décompose le champ magnétique  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

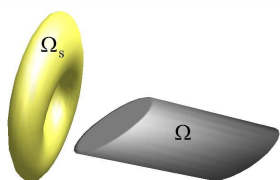
où ...

# 1 - Le problème de la magnétostatique

On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  dans les milieux non magnétiques.



- On introduit une loi de comportement (linéaire) pour le noyau ferromagnétique  $\Omega$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

- On décompose le champ magnétique  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

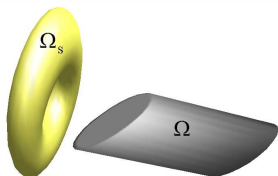
où ...

# 1 - Le problème de la magnétostatique

On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  dans les milieux non magnétiques.



- On introduit une loi de comportement (linéaire) pour le noyau ferromagnétique  $\Omega$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

- On décompose le champ magnétique  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

où ...

❶ Le champ  $\mathbf{H}_s$  vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H}_s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{0} & \text{dans } \overline{\mathbb{C}\Omega_s} \end{cases}$$

On montre que :

$$\mathbf{H}_s(x) = \int_{\Omega_s} \mathbf{j}(y) \wedge \nabla_y G(x, y) dy \quad \text{où} \quad G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|}$$

▶  $\mathbf{H}_s$  se calcule en évaluant cette intégrale volumique par quadrature numérique.

❶ Le champ  $\mathbf{H}_s$  vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H}_s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

On montre que :

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_s} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \text{où} \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

▶  $\mathbf{H}_s$  se calcule en évaluant cette intégrale volumique par quadrature numérique.



② Le champ  $\mathbf{H}_m$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_m & = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{div } \mathbf{H}_m & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] & = [\mu] \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n} & \text{à travers } \Sigma = \partial\Omega \end{cases}$$

On a  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  avec  $\phi$  solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] \underbrace{(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n})}_{= g} & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

Caractéristique : problème 3D en domaine non borné.

② Le champ  $\mathbf{H}_m$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_m & = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{div } \mathbf{H}_m & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] & = [\mu] \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n} & \text{à travers } \Sigma = \partial\Omega \end{cases}$$

On a  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  avec  $\phi$  solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] \underbrace{(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n})}_{= g} & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

**Caractéristique** : problème 3D en domaine non borné.

▶ Résoudre ( $\mathcal{P}$ ) par une méthode E.F. standard nécessite de borner le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle** et de construire une **condition aux limites** sur cette frontière.

👉 M. LENOIR and A. JAMI. *A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 16, pp. 341-359 (1978).

### Formule de représentation intégrale

Le potentiel  $\phi$  solution de  $(\mathcal{P})$  vérifie pour  $x \notin \Sigma$ ,

$$\phi(x) = (\mu - 1) \int_{\Sigma} g(y) G(x, y) d\sigma_y - (\mu - 1) \int_{\Sigma} \phi(y) G_n(x, y) d\sigma_y$$

où  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|}$  et  $G_n(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}$ .

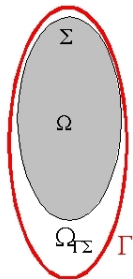
On borne le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle**  $\Gamma$  arbitrairement proche de  $\Sigma$ . On résout le problème :

$$(\mathcal{P}_b) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega_{\Gamma\Sigma} \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = (\mu - 1) g & \text{à travers } \Sigma \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} + \phi & = (\mu - 1) h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où

$$h(x) = \int_{\Sigma} g(y) D^{\Gamma} G(x, y) d\sigma_y - \int_{\Sigma} \phi(y) D^{\Gamma} G_n(x, y) d\sigma_y$$

$$\text{et } D^{\Gamma} G = \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}} + G.$$



## Formulation variationnelle

On note  $\Omega_\Gamma = \bar{\Omega} \cup \Omega_{\Sigma\Gamma}$ .

Trouver  $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$  tel que pour tout  $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega_{\Sigma\Gamma}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma} \phi \psi \, d\gamma \\ & + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} \phi(x) D^\Gamma G_n(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \\ = & (\mu - 1) \int_{\Sigma} g \psi \, d\sigma + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} g(x) D^\Gamma G(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \end{aligned}$$

On montre que :

- 1 Le problème  $(\mathcal{P}_b)$  admet une unique solution  $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$  qui est la restriction de la solution du pb  $(\mathcal{P})$  au domaine  $\Omega_\Gamma$ .
- 2 L'erreur de discrétisation par E.F. isoparamétriques de Lagrange  $P_k$  se comporte en  $\mathcal{O}(h^k)$ .

👉 S. BALAC and G. CALOZ. *Coupling of FEM and integral representation in magnetostatics*, submitted to Int. J. Numer. Model. (2006).

## Caractéristiques de la méthode

- Possibilité de localiser le calcul dans un voisinage de  $\Omega$
- Utilisation d'E.F. classiques (Lagrange)  
Matrice non symétrique mais de taille « raisonnable » et creuse
- Pas d'intégrale singulière ( $\Gamma \neq \Sigma$ )

Mise en oeuvre numérique avec le code MELINA (D. Martin)

<http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>



### 3 - Calcul du champ magnétique

On a  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$  avec  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  donné par

$$H_m(x) = (\mu - 1) \left( \underbrace{\int_{\Sigma} g(y) \nabla_x G(x, y) d\sigma_y}_{= J_1(x)} - \underbrace{\int_{\Sigma} \phi(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y}_{= J_2(x)} \right) \quad (1)$$

► Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  s'obtient ponctuellement (par ex. nœuds d'une surface de contrôle) **par évaluation des 2 intégrales de surface**  $J_1(x)$  et  $J_2(x)$ .



Le calcul de  $\mathbf{H}_m$  par cette formule est **inefficaces** pour des valeurs de  $\mu \geq 10$  et l'erreur est d'autant plus grande que  $\mu$  augmente.

**Table:** Valeurs de la composante principale de  $J_1$  et  $J_2$ , de  $\mathbf{H}_m$  calculé par la relation (1) et valeur exacte pour  $\mu = 10^3$ .

|       | $J_1(x_k)$          | $J_2(x_k)$          | $\mathbf{H}_m$ par(1) | $\mathbf{H}_m$ exact |
|-------|---------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| $x_1$ | $0.9266 \cdot 10^4$ | $0.9327 \cdot 10^4$ | $-0.4792 \cdot 10^6$  | $-0.2284 \cdot 10^6$ |
| $x_2$ | $0.8897 \cdot 10^4$ | $0.8954 \cdot 10^4$ | $-0.4522 \cdot 10^6$  | $-0.2193 \cdot 10^6$ |
| $x_3$ | $0.7437 \cdot 10^4$ | $0.7529 \cdot 10^4$ | $-0.7301 \cdot 10^6$  | $-0.1847 \cdot 10^6$ |
| $x_4$ | $0.8534 \cdot 10^4$ | $0.8629 \cdot 10^4$ | $-0.7577 \cdot 10^6$  | $-0.2116 \cdot 10^6$ |
| $x_5$ | $0.6962 \cdot 10^4$ | $0.7087 \cdot 10^4$ | $-0.9959 \cdot 10^6$  | $-0.1740 \cdot 10^6$ |

► On cherche à étudier le comportement de  $\phi$  et  $\mathbf{H}_m$  en fonction de  $\mu$ .

On écrit les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}\phi|_{\Omega} &= \phi_0^i + \frac{1}{\mu}\phi_1^i + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^i + \dots \\ \phi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}} &= \underbrace{\phi_0^e + \frac{1}{\mu}\phi_1^e + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^e + \dots}_{\text{de l'ordre de l'erreur numérique de la méthode}}\end{aligned}$$

► On cherche à étudier le comportement de  $\phi$  et  $\mathbf{H}_m$  en fonction de  $\mu$ .

On écrit les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}\phi|_{\Omega} &= \phi_0^i + \frac{1}{\mu}\phi_1^i + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^i + \dots \\ \phi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}} &= \phi_0^e + \frac{1}{\mu}\phi_1^e + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^e + \dots\end{aligned}$$

de l'ordre de l'erreur  
numérique de la méthode

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $\phi_k^i \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  et  $\phi_k^e \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{C}\Omega)$  sont les uniques solutions des problèmes couplés suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_k^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_k^i = F(\partial_n \phi_{k-1}^e) & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_k^e = 0 & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega} \\ \phi_k^e = \phi_k^i & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_0^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_0^i = g & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $\phi_k^i \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  et  $\phi_k^e \in \mathbb{W}_0^1(\mathbb{C}\Omega)$  sont les uniques solutions des problèmes couplés suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_k^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_k^i = F(\partial_n \phi_{k-1}^e) & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_k^e = 0 & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega} \\ \phi_k^e = \phi_k^i & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_0^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_0^i = g & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{x}) = (1 - \mu) \int_{\Sigma} \left( g(y) \nabla_x G(\mathbf{x}, y) - \phi_0^i(y) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) \right) d\sigma_y \\ + \int_{\Sigma} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu - 1}{\mu^k} \phi_k^i(y) \right) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) d\sigma_y.$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu - 1}{\mu} \int_{\Sigma} \phi_1^i(y) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) d\sigma_y \\ + \frac{\mu - 1}{\mu^2} \int_{\Sigma} \phi_2^i(y) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) d\sigma_y$$

⇒ S. BALAC and G. CALOZ. *Cancellation errors in an integral for calculating magnetic field from reduced scalar potential*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 39, pp. 1997-2002 (2003).

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{x}) = (1 - \mu) \int_{\Sigma} \left( g(y) \nabla_x G(\mathbf{x}, y) - \phi_0^i(y) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) \right) d\sigma_y \\ + \int_{\Sigma} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu - 1}{\mu^k} \phi_k^i(y) \right) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) d\sigma_y.$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu - 1}{\mu} \int_{\Sigma} \phi_1^i(y) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) d\sigma_y \\ + \frac{\mu - 1}{\mu^2} \int_{\Sigma} \phi_2^i(y) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, y) d\sigma_y$$

👉 S. BALAC and G. CALOZ. *Cancellation errors in an integral for calculating magnetic field from reduced scalar potential*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 39, pp. 1997-2002 (2003).



- La méthode présente certains avantages pour de l'optimisation de forme d'un électro-aimant.
  - Permet une localisation du calcul : la frontière  $\Gamma$  peut être placée très proche de la frontière du noyau ferromagnétique  $\Sigma$ .
  - Possibilité de calculer le champ magnétique de manière ponctuelle (et non globale) en des nœuds d'une surface de contrôle.
- Mise en œuvre de la méthode pour des problèmes axisymétriques.

- La méthode présente certains avantages pour de l'optimisation de forme d'un électro-aimant.
  - Permet une localisation du calcul : la frontière  $\Gamma$  peut être placée très proche de la frontière du noyau ferromagnétique  $\Sigma$ .
  - Possibilité de calculer le champ magnétique de manière ponctuelle (et non globale) en des nœuds d'une surface de contrôle.
- Mise en œuvre de la méthode pour des problèmes axisymétriques.