Approximation du système de Stokes ou de Oseen avec une condition de Dirichlet non homogène peu régulière

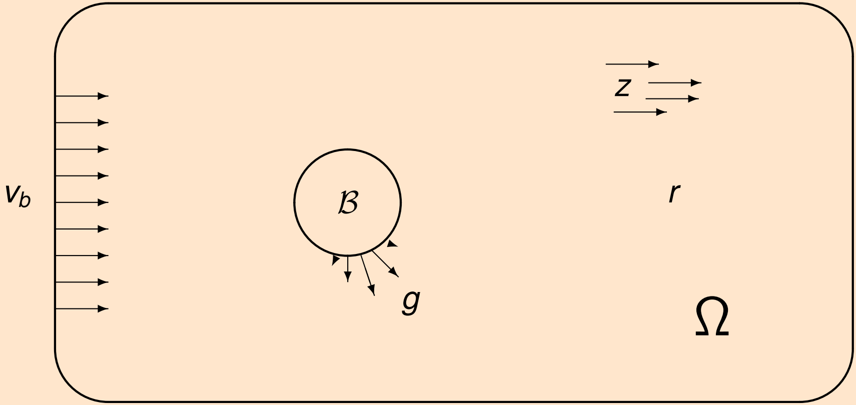
Mehdi Badra

Université Paul Sabatier Toulouse 3, Laboratoire MIP

38e Congrès national d'analyse numérique

31 Mai 2006

Motivation: stabilisation par contrôle fontière



- Etat d'équilibre (z, r) :

$$-\Delta z + (z \cdot \nabla) z + \nabla r = 0, \quad \nabla \cdot z = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \quad z = v_b \ \ sur \ \ \partial\Omega$$

- Etat perturbé $(z + y(t), r + p(t))$:

$$\partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = 0 \ \ dans \ \ \Omega \times (0, \infty),$$
$$\nabla \cdot y = 0 \ \ dans \ \ \Omega \times (0, \infty), \quad y = g \ \ sur \ \ \partial\Omega \times (0, \infty) \quad y(0) = y_0.$$

- Stabilisation:

$$g \in L^2(\partial\Omega \times (0, \infty)) \quad \text{tel que } y(t) \to 0 \quad \text{quand } t \to \infty$$

- Travaux récents:
  [Badra 2005], [Raymond 2005], [Barbu,Lascieka,Triggiani 2005]

Problème d'approximation

- Analyse numérique du système de Oseen:

$$\partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) y + \nabla p = 0 \ \ dans \ \ \Omega \times (0, T)$$
$$\nabla \cdot y = 0 \ \ dans \ \ \Omega \times (0, T), \quad y = g \ \ sur\, \partial\Omega \times (0, T), \quad y(0) = 0,$$

Etat approché $\quad y_h(t) \in V_h \quad$ tel que $\quad y_h \to y \quad$ quand $\quad h \to 0$

- Semi-discrétisation en espace
- Formulation discrète et étude de convergence dans un cadre général. Approximation non conforme possible
- Contrôle frontière peu régulier: $g \in L^p(0, T; L^2(\partial\Omega))$

Limite de l'approche variationelle classique

- Formulation variationelle du système de Stokes ($z = 0$):

  $y = w + Dg$ avec $D : L^2(\partial\Omega) \to L^2(\Omega)$ et $(w, p) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$

$$\begin{aligned} \partial_t \int_\Omega w(t) \cdot v + \int_\Omega \nabla w(t) : \nabla v + \int_\Omega p(t) \nabla \cdot v &= \langle f_g(t) | v \rangle, & \forall v \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \\ \int_\Omega q \nabla \cdot w(t) &= 0 & \forall q \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

- Difficultée: $f_g = -D\partial_t g + \Delta Dg$ a priori régulier
- Idée: formulation faible pour $g \cdot n \neq 0$ (travaux récents)

THEORIE DES SEMIGROUPES
Exemple 1 : l'équation de la chaleur

$$\partial_t y - \Delta y = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T),\ y(0) = 0,\ y|_{\partial\Omega} = g \in L^p(0,T;L^2(\partial\Omega))$$

- Reformulation abstraite:

$$y' = Ay + (-A)Dg \in L^p(0,T;\mathcal{D}(A^*)'), \quad y(0) = 0$$

$$(\mathcal{D}(A), A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \Delta) \quad \text{et} \quad D : g \mapsto w \mid \begin{cases} -\Delta w & = 0 \\ w|_{\partial\Omega} & = g \end{cases}$$

- Variation de la constante: $y \in L^p(0,T;L^2(\Omega))$

$$y(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bg(s)ds, \quad B = (-A)D \in \mathcal{L}(L^2(\partial\Omega), \mathcal{D}(A^*)')$$

- Etat et système discrétisé: $V_h \subset L^2(\Omega)$, $y_h \in L^p(0, T; V_h)$

$$y_h' = A_h y_h + (-A_h) D_h g \in L^p(0, T; V_h), \quad y_h(0) = 0$$

- Formulation par Noyau de Convolution:

$$y_h(t) = \int_0^t e^{A_h(t-s)} B_h g(s) ds, \quad B_h = (-A_h) D_h \in \mathcal{L}(L^2(\partial\Omega), V_h)$$

$$y - y_h = [K_h] * [g], \quad K_h(t) = e^{At} B - e^{A_h t} B_h$$

- Théorie des intégrales singulières et $(A_h, D_h) \to (A, D)$ [Lasiecka 1986]

$$\|y - y_h\|_{L^p(0,\infty;L^2(\Omega))} \leq C h^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^p(0,\infty;L^2(\partial\Omega))}, \; 1 < p < +\infty.$$

Exemple 2 : l'équation de Stokes

$$\partial_t y - \Delta y + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad dans \quad \Omega \times (0, T),$$
$$y(0) = 0, \quad y|_{\partial\Omega} = g \in L^p(0, T; L^2(\partial\Omega))$$

- Espace de Stokes:

$$V_n^0(\Omega) = \{y \in L^2(\Omega) \mid \nabla \cdot y = 0, \quad y \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

- Projecteur orthogonal: $P : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow V_n^0(\Omega)$
- Opérateur de Stokes sur $V_n^0(\Omega)$:

$$(\mathcal{D}(A), A) = (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap V_0^1(\Omega), P\Delta)$$

- Relèvement: $D : g \mapsto w \mid \left\{ \begin{array}{rl} -\Delta w + \nabla p & = 0 \\ \nabla \cdot w = 0, \; w|_{\partial\Omega} & = g \end{array} \right.$
- Reformulation abstraite: [J.-P. Raymond 2005]

$$\begin{aligned} y \quad & = w + (I - P)Dg, \quad w \in L^p(0, T; V_n^0(\Omega)) \\ w' \quad & = Aw + (-A)PDg \in L^2(0, T; \mathcal{D}(A^*)'), \quad w(0) = 0 \end{aligned}$$

- Système discrétisé: $V_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega), \quad P_h : \mathbf{L}^2(\Omega) \to V_h$

$$\begin{aligned} y_h &= w_h + (I - P_h)D_h g, \quad w_h \in L^p(0,T;V_h), \\ w_h' &= A_h w_h + (-A_h)P_h D_h g \in L^2(0,T;V_h), \quad w_h(0) = 0 \end{aligned}$$

- Formulation par Noyau de Convolution:

$$w - w_h = [K_h] * [g], \quad K_h(t) = e^{At}(-A)PD - e^{A_h t}(-A_h)P_h D_h$$

$$y - y_h = [K_h] * [g] + \Big((I - P)D - (I - P_h)D_h\Big)g$$

- Pour $(A_h, P_h, D_h) \to (A, P, D)$, montrer

$$\|y - y_h\|_{L^p(0,\infty;L^2(\Omega))} \leq Ch^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^p(0,\infty;L^2(\partial\Omega))}, \quad 1 < p < +\infty$$

Equation d'évolution générale

- X, V, G Hilbert, $V \subset X$, $(\mathcal{D}(A), A)$ sur V et $B \in \mathcal{L}(G, \mathcal{D}(A^*)')$

$$y' = Ay + Bg \in L^p(0, \infty; \mathcal{D}(A^*)'), \quad y(0) = 0$$

- $(V_h)_{h>0}$ Hilbert, $V_h \subset X$ et $A_h \in \mathcal{L}(V_h)$, $B_h \in \mathcal{L}(G, V_h)$

$$y_h' = A_h y_h + B_h g \in L^p(0, \infty; V_h), \quad y_h(0) = 0$$

- Quelles conditions sur (A_h, B_h) pour avoir

$$\|y - y_h\|_{W^{s_2,p_2}(0,\infty;X)} \leq C(h)\|g\|_{W_0^{s_1,p_1}(0,\infty;G)}, \left\{ \begin{array}{l} (p_1, p_2) \in [1, \infty]^2 \\ (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \quad ?$$

Multiplicateur de Fourier/Noyau de Convolution

$$\textbf{(1)}\ y' = Ay + Bg, \qquad y_h' = A_h y_h + B_h g, \quad y(0) = y_h(0) = 0$$

$$\textbf{(2)}\ \widehat{[y]} = (i\xi - A)^{-1} B\widehat{[g]}(\xi), \quad \widehat{[y_h]} = (i\xi - A_h)^{-1} B_h \widehat{[g]}(\xi)$$

$$\textbf{(3)}\ (y - y_h)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} M_h(\xi) \widehat{[g]}(\xi) d\xi$$

$$M_h(\xi) = (i\xi - A)^{-1} B - (i\xi - A_h)^{-1} B_h$$

THÉORÈME

Si $\quad \|M_h(\xi)\| + |\xi| \|M_h'(\xi)\| \leq C(h), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

Alors $\quad \|y - y_h\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq C_p C(h) \|g\|_{L^p(0,\infty;G)}, \quad p \in]1, \infty[$

- Cas $p_1 = p_2$: $\kappa \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{H}_1): \ \|M_h(\xi)\| + |\xi| \|M_h'(\xi)\| \leq C(h)/|\xi|^\kappa, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$D_t^{s+\kappa}(y - y_h)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} (\xi/i)^\kappa M_h(\xi) \widehat{D_t^s[g]}(\xi) d\xi$$

$$\|y - y_h\|_{W^{s+\kappa,p}(0,\infty;X)} \leq C_p C(h) \|g\|_{W_0^{s,p}(0,\infty;G)}, \ p \in]1, \infty[$$

- Cas $s_1 = s_2$: $\kappa \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{S}_\delta = \{\nu \in \mathbb{C} \mid |arg(\nu)| < \pi/2 + \delta\}, \ \delta > 0$

$$(\mathcal{H}_2): \ \|(\nu - A)^{-1} B - (\nu - A_h)^{-1} B_h\| \leq C(h)/|\nu|^\kappa, \quad \forall \nu \in \mathcal{S}_\delta$$

$$D_t^s(y - y_h) = [e^{At} B - e^{A_h t} B_h] * D_t^s[g]$$

$$\|y - y_h\|_{W^{s,p/(1-\kappa p)}(0,\infty;X)} \leq C_p C(h) \|g\|_{W_0^{s,p}(0,\infty;G)}, \ p \in]1, 1/\kappa[$$

Hypothèse $\mathcal{H}(A, B, A_h, B_h)$

- $(e^{At})_{t>0}$ analytique dans V
- $(e^{A_h t})_{t>0}$ uniformément (en h) analytique dans V_h
- Estimation $A_h \to A$:

$$\|A^{-1}P - A_h^{-1}P_h\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ch^m, \quad m > 0$$

- $A^{-\gamma}B \in \mathcal{L}(G, V)$, $\gamma \geq 0$
- Inégalité inverse:

$$\|A_h^{\kappa}B_h\|_{\mathcal{L}(G,V)} \leq Ch^{-m(\bar{\gamma}+\kappa)}, \quad 0 \leq \bar{\gamma} \leq \gamma,\ \kappa < 1 - \gamma$$

- Estimation $B_h \to B$:

$$\|A^{\kappa-1}(PB_h - B)\|_{\mathcal{L}(G,V)} \leq Ch^{m(1-\bar{\gamma}-\kappa)}$$

Résultats de convergence

$$\mathcal{H}(A, B, A_h, B_h) \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{H}_1),\ (\mathcal{H}_2) \quad avec \quad C(h) = Ch^{m(1-\bar{\gamma}-\kappa)}$$

- Résultat de Convergence: $\kappa = 0$

$$\|y - y_h\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq Ch^{m(1-\bar{\gamma})} \|g\|_{L^p(0,\infty;G)}, p \in]1, \infty[$$

- Plus géneralement, pour $(s, \kappa) \in \mathbb{R} \times [0, 1-\gamma]$:

$$\begin{aligned}
\|y - y_h\|_{W^{s+\kappa,p}(0,\infty;X)} &\leq Ch^{m(1-\bar{\gamma}-\kappa)} \|g\|_{W_0^{s,p}(0,\infty;G)}, p \in]1, \infty[\\
\|y - y_h\|_{W^{s,p/(1-\kappa p)}(0,\infty;X)} &\leq Ch^{m(1-\bar{\gamma}-\kappa)} \|g\|_{W_0^{s,p}(0,\infty;G)},\ p \in]1, 1/\kappa[
\end{aligned}$$

Méthode Eléments Finis: **FEM**$(1,0)$

$$X_h \subset W_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega),\ X_h \subset \mathbf{H}^1_0(\Omega),\ Q_h \subset L^2(\Omega)$$

$$\textit{Inf-Sup}(X_h, Q_h),\ V_h = \{v_h \in X_h \mid \int_\Omega q_h \nabla \cdot v_h = 0\ \forall q_h \in Q_h\}$$

- (A_h, D_h) se déduit de la dicrétisation du système de Oseen stationnaire:

$$\begin{array}{l} \lambda_z y - \Delta y + (z\cdot\nabla)y + (y\cdot\nabla)z + \nabla p = f \ \ dans\ \ \Omega \\ \nabla \cdot y = 0\ \ dans\ \ \Omega, \quad y = g\ \ sur\ \ \partial\Omega \end{array}$$

- On montre la convergence $(A_h, D_h) \to (A, D)$:

$$\begin{array}{rl} \|((\lambda_z - A)^{-1}P - (\lambda_z - A_h)^{-1}P_h)f\|_0 & \leq Ch^2\|f\|_0 \\ \|(D - D_h)g\|_0 & \leq Ch^{\frac{1}{2}}\|g\|_{0,\partial\Omega} \end{array}$$

Méthode Eléments Finis: **FEM**$(2,1)$

$$X_h \subset W_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega),\ X_h \subset \mathbf{H}^1_0(\Omega),\ Q_h \subset H^1(\Omega)$$

$$\textit{Inf-Sup}(X_h, Q_h),\ V_h = \{v_h \in X_h \mid \int_\Omega q_h \nabla \cdot v_h = 0\ \forall q_h \in Q_h\}$$

- P_h se déduit de la discrétisation de la décomposition de Helmotz:

$$y + \nabla q = f,\ \nabla \cdot y = 0\ \ dans\ \ \Omega,\ y \cdot n = 0\ \ sur\ \ \partial\Omega$$

- On montre la convergence $P_h \to P$:

$$\|(P - P_h)f\|_0 \leq Ch\|f\|_1$$

Résultats de convergence

- Système de Oseen:

$$\partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) y + \nabla p = 0 \;\; dans \;\; \Omega \times (0, T)$$
$$\nabla \cdot y = 0 \;\; dans \;\; \Omega \times (0, T), \quad y = g \;\; sur \, \partial\Omega \times (0, T), \quad y(0) = 0$$

- Formulation discrète:

$$\begin{aligned} y_h &= w_h + (I - P_h) D_h g, \\ w_h' &= A_h w_h + (-A_h) P_h D_h g, \quad w_h(0) = 0 \end{aligned}$$

- Résultats de convergence: $\forall p \in [1, \infty]$,

$$\|y - y_h\|_{W^{s,p}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C h^{\frac{1}{2}} \ell_{h,p} \|g\|_{W_0^{s,p}(0,T;L^2(\partial\Omega))}$$

où $\ell_{h,p} = |\ln h|$ si $p = 1, \infty$ et $\ell_{h,p} = 1$ sinon

REMARQUES ET PERSPECTIVES

- Approximation du système de Navier-Stokes
- Généralisation au cas Banach:
  - $y(t) \in \mathbf{L}^p(\Omega), g(t) \in \mathbf{L}^p(\partial\Omega)$
  - Notion de $\mathcal{R}$-bornitude ([Denk, Hieber, Prüss 2003])
- Contrôle par feedback $g(t) = -R^{-1}B^*\Pi P y(t)$

$$A^*\Pi + \Pi A - \Pi B R^{-1} B^* \Pi + I = 0$$

BIBLIOGRAPHIE

- M. Badra, *Feedback stabilization of 3-D Navier-Stokes Equations based on an extended system*, 2005, to appear Proceedings of the 22nd IFIP TC7 Conference.
- V. Barbu, I. Lasiecka, R. Triggiani, *Boundary Stabilization of Navier-Stokes Equations*, 2005, to appear in Memoirs of the A.M.S.
- R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, *$\mathcal{R}$-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol.166, n$^\circ$788, 2003.
- I. Lasiecka, *Galerkin approximations of abstract parabolic boundary value problems with rough boundary data—L_p theory*, Math. Comp., Vol.47, n$^\circ$175, 55–75, 1986.
- J.-P. Raymond, *Stokes and Navier-Stokes Equations with Nonhomogeneous Boundary Conditions*, 2005, to appear.
- J.-P. Raymond, *Feedback Boundary Stabilization of the two Dimentional Navier-Stokes Equations*, 2005, to appear in SIAM Cont. Opt.