

Applications conformes et dérivée de forme pour le problème de transmission avec une seule mesure

LEKBIR AFRAITES

Université de Technologie de Compiègne

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Compiègne.

31 mai 2006

Plan de la présentation

Introduction

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

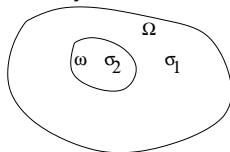
La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

Introduction

Nous nous intéressons au problème inverse d'identification d'une inclusion inconnue ω à partir d'une *unique paire* de mesures frontières (f, g) . Ces mesures sont reliées au potentiel u qui satisfait le système suivant:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) & = 0 \text{ dans } \Omega \\ u & = f \text{ sur } \partial\Omega \\ \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} & = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$



Ici, nous notons :

- ▶ $\sigma = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\chi_\omega$
- ▶ χ est la fonction indicatrice de ω .

Mathématiquement, la détermination de $\partial\omega$ peut se faire à partir de la connaissance du graphe complet de l'opérateur Dirichlet à Neumann Λ_ω défini par:

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega &: H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} &\mapsto \langle \sigma_1 \nabla u, n \rangle |_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

Transformation du problème inverse à un problème d'optimisation de forme non linéaire.

Objectifs du travail :

- ▶ comment trouver un *bon* domaine initial ω_0 pour la méthode de descente.
- ▶ comparer deux fonctionnelles coûts pour reconstruire la forme ω .

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

Identifiabilité avec une seule mesure

Résultat connu : identifiabilité des disques, identifiabilité approchée des ε disques (*E. Fabes, H.Kang, J.Seo 1999*).

Soient ω_1 et ω_2 appartenant à $C(\varepsilon)$, la classe des ε perturbations C^2 de tous les disques contenus dans Ω_0 , un sous-ensemble ouvert de Ω à une certaine distance $2\delta_0$ de $\partial\Omega$.

Il existe une constante positive c tels que :

$$\wedge_{\omega_1}(f) = \wedge_{\omega_2}(f) = g \implies |\omega_1 \Delta \omega_2| \leq c \varepsilon$$

En d'autres termes, si les mesures de frontières sont les mêmes, les deux domaines ω_1 et ω_2 sont proches.

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

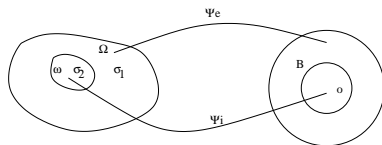
Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

Choix du domaine initial

En utilisant la théorie des applications conformes, nous transportons le problème de Dirichlet-à-Neumann à un anneau.



(a) Transformation du problème

Soit ϕ la trace sur le bord extérieur de l'application de Riemann comme inconnue.

Nous avons:
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mathcal{D}_\rho[f \circ \phi]}{g \circ \phi}.$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{(g \circ \phi)\mathcal{D}_\rho[f \circ \phi] + (G \circ \phi)\mathcal{D}_0[F \circ \phi]}{(g^2 + G^2) \circ \phi}.$$

Mise sous forme de point fixe

On procède par itérations successives $\phi_{n+1} = K\phi_n$ où l'opérateur K est défini par

$$\begin{aligned} U : H^1(0, 2\pi) &\rightarrow L^2(0, 2\pi) \\ \psi &\mapsto \frac{(g \circ V\psi)\mathcal{D}_\rho[f \circ V\psi] + (G \circ V\psi)\mathcal{D}_0[F \circ V\psi]}{(g^2 + G^2) \circ V\psi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K : H^1(0, 2\pi) &\rightarrow H^1(0, 2\pi) \\ \psi &\mapsto \int_0^t \left(U\psi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\psi(\tau) d\tau \right) dx. \end{aligned}$$

$$\forall k \neq 0, \quad \rho = \left| \frac{\sigma_1 k - \lambda_k}{\mu(\sigma_1 k + \lambda_k)} \right| \frac{1}{2k} \quad \mu = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

où λ_k valeurs propres de \mathcal{D}_ρ . Nous avons montré que K est contractant sous certaines hypothèses.

Discrétisation

1. *Etape 1 : calcul de la nouvelle fonction ψ_{n+1} .*
 - 1.1 déterminer les valeurs propres de \mathcal{D}_{ρ_n} ,
 - 1.2 calculer les coefficients de Fourier de $f \circ \phi_n$ et $g \circ \phi_n$,
 - 1.3 calculer U
 - 1.4 calculer les coefficients de Fourier de U et déduire ψ_{n+1} ,
 - 1.5 $\phi_{n+1}(t) = t + \psi_{n+1}(t)$;
2. *Etape 2 : calcul du nouveau rayon ρ_{n+1} .*
 - 2.1 calculer les coefficients de Fourier α_k de $\phi'_{n+1} g \circ \phi_{n+1}$ et β_k de $f \circ \phi_{n+1}$,
 - 2.2 évaluer $\lambda = \sqrt{(|\alpha_{k_0}|^2 + |\alpha_{-k_0}|^2) / (|\beta_{k_0}|^2 + |\beta_{-k_0}|^2)}$,
 - 2.3 déterminer ρ_{n+1}

Tests numériques

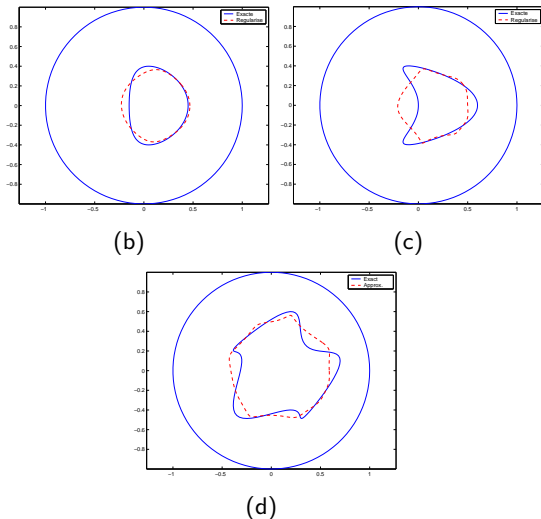


Figure: Quelques exemples reconstruits par les applications conformes

Les solutions d'états

Soit u_D solution du problème de Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_D = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \omega \text{ et dans } \omega, \\ [u_D] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ [\sigma \partial_n u_D] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ u_D = f \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

et u_N solution du problème de Neumann:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_N = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \omega \text{ et dans } \omega, \\ [u_N] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ [\sigma \partial_n u_N] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ \sigma_1 \partial_n u_N = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Les dérivées d'états

u'_D, u'_N vérifient les deux problèmes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u'_D = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \omega \text{ et dans } \omega, \\ [u'_D] = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \partial_n u_D^- V_n \text{ sur } \partial\omega, \\ [\sigma \partial_n u'_D] = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{div}_\tau (V_n \nabla_\tau u_D) \text{ sur } \partial\omega, \\ u'_D = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u'_N = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \omega \text{ et dans } \omega, \\ [u'_N] = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \partial_n u_N^- V_n \text{ sur } \partial\omega, \\ [\sigma \partial_n u'_N] = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{div}_\tau (V_n \nabla_\tau u_N) \text{ sur } \partial\omega, \\ \sigma_1 \partial_n u'_N = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Remarque: u'_D et $u'_N \notin H^1(\Omega)$ mais les dérivées matérielles existent.

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

Fonctionnelle coût de type : Kohn-Vogelius

On considère la fonctionnelle de coût suivant:

$$J_{KV}(\omega) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla(u_D - u_N)|^2.$$

où u_D, u_N solution du problème de Dirichlet et de Neumann. Nous avons le gradient de J_{KV}

$$DJ_{KV}(\omega).V = -(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{\partial\omega} F(u_D, u_N) V_n.$$

où :

$$F(u_D, u_N) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} [(\partial_n u_D^+)^2 - (\partial_n u_N^+)^2] + |\nabla_{\tau} u_D|^2 - |\nabla_{\tau} u_N|^2$$

Intérêt de la méthode:

Pas d'état d'adjoint car fonctionnelle énergie. Le gradient, dans une perturbation donnée V , ne dépend que du seul état u_D, u_N et non de ses dérivées de formes.

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

Moindres carrés

Soit la fonctionnelle de moindres carrés:

$$J_{LS}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\sigma_1 \partial_n u_D - g|^2.$$

avec g : mesure frontière éventuellement bruitée.

Nous avons :

$$DJ_{LS}(\omega).V = -(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{\partial\omega} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \partial_n w^+ \partial_n u_D^+ + \langle \nabla_\tau u_D, \nabla_\tau w \rangle \right) V_n.$$

où w est solution du problème adjoint:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \nabla w) & = 0 \text{ dans } \Omega, \\ w & = \sigma_1 \partial_n u_D - g \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Calcul de l'état par représentation d'intégrale

Soit $\Gamma(x, y)$ la solution fondamentale du Laplacien définie par:

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x - y|).$$

Nous avons u_D, u_N obtenus par les deux systèmes :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + \mu K_\omega & \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} S_{\partial\Omega\partial\omega} \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} K_{\partial\omega\partial\Omega} & S_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_D)|_{\partial\omega} \\ (\partial_n u_D)|_{\partial\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta K_{\partial\Omega\partial\omega} f \\ (-\frac{1}{2}I + K_\Omega) f \end{bmatrix}.$$

où: $\beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$

La quantité $(\partial_n u_D)^+$ est déterminée par:

$$S_\omega (\partial_n u_D)|_{\partial\omega}^+ = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left[-\frac{1}{2}I + K_\omega \right] u_D(x)|_{\partial\omega}.$$

La solution de Neumann u_N est donnée par:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + \mu K_\omega & -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} K_{\partial\Omega\partial\omega} \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} K_{\partial\omega\partial\Omega} & -\frac{1}{2}I + K_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_N)|_{\partial\omega} \\ (u_N)|_{\partial\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha S_{\partial\Omega\partial\omega} g \\ S_\Omega g \end{bmatrix}.$$

où: $\alpha = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$

Donc, $(\partial_n u_N)|_{\partial\omega}^+$ est donnée par

$$S_{\partial\omega\partial\omega} (\partial_n u_N)|_{\partial\omega}^+ = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left[-\frac{1}{2}I + K_\omega \right] u_N(x)|_{\partial\omega}.$$

Les systèmes sont discrétisés par la méthode de collocation en approchant les inconnues par des polynômes linéaires P^1 et en subdivisant la frontière par des lignes brisées.

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

La procédure d'optimisation

Nous nous intéressons donc au domaine étoilé paramétré par :

$$\partial\omega = \left\{ r(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in (0, 2\pi) \right\}$$

où $r(t)$ est approchée numériquement par:

$$r_n(t) = \left(a_0^n + \sum_{k=1}^n a_k^n \cos kt + b_k^n \sin kt \right).$$

les inconnues sont les coefficients de Fourier (a_i, b_i) . Le champ de déformation V est choisi par :

$$V(t) = h_n(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, h_n(t) = \left(a_0^n + \sum_{k=1}^n a_k^n \cos kt + b_k^n \sin kt \right).$$

$$V_n(t) = \frac{h(t)r(t)}{\sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}}.$$

Discrétisation des fonctionnelles

$$DJ_{KV}(\omega).h = -(\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^{2\pi} F(u_D, u_N)(t) h(t) r(t) dt$$

où:

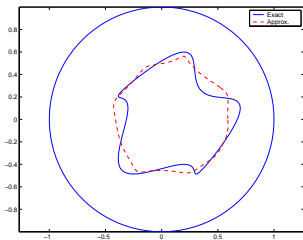
$$F(u_D, u_N)(t) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} ((\partial_n u_D^+)^2 - (\partial_n u_N^+)^2) + |\nabla_\tau u_D|^2 - |\nabla_\tau u_N|^2 \right) (t)$$

$$DJ_{LS}(\omega).h = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \partial_n w^+ \partial_n u_D^+ + \langle \nabla_\tau u_D, \nabla_\tau w \rangle \right) (t) h(t) r(t) dt.$$

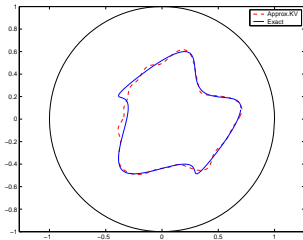
où on calcule donc le gradient de DJ_{KV} et DJ_{LS} dans toutes les directions. Nous utilisons l'algorithme de BFGS pour résoudre le problème d'optimisation. Cette méthode de Quasi-Newton est adaptée à ce genre de problème.

Tests numériques

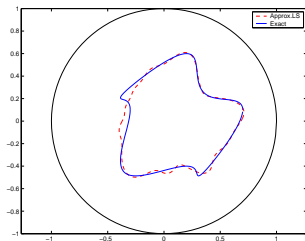
$$f(t) = \sin(t) \quad \sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 3, \quad N_1 = 150 \quad N_2 = 350$$



(a) Conforme

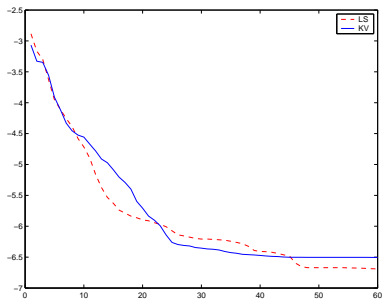


(b) J_{KV}

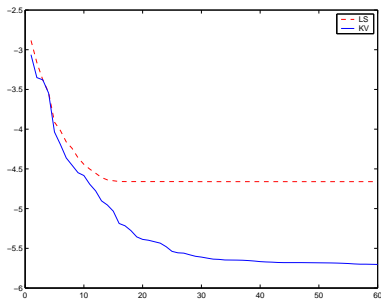


(c) J_{LS}

Convergence de la fonctionnelle coût

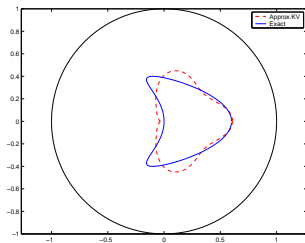


(d) Convergence 0% de bruit

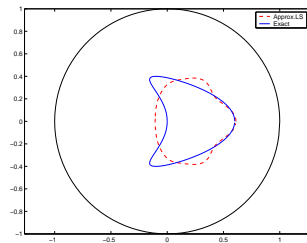


(e) Convergence 1% de bruit

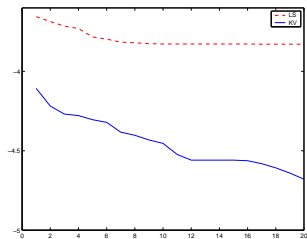
Figure: Convergence de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations



(a) Kohn-Vogelius



(b) Moindres carrés



(c) Convergence

Plan de la présentation

Introduction

Identifiabilité et identifiabilité approchée

Choix du domaine initial

Fonctionnelle coût : Kohn-Vogelius

Fonctionnelle coût : moindres carrés

La procédure d'optimisation et les résultats numériques

Conclusion et Perspectives

Conclusion et Perspectives

- ▶ Le domaine initial obtenu par les applications conformes est un bon candidat pour les méthodes de descente.
- ▶ La méthode de Kohn Vogelius est plus robuste que la méthode de moindres carrés.

Conclusion et Perspectives

- ▶ Le domaine initial obtenu par les applications conformes est un bon candidat pour les méthodes de descente.
- ▶ La méthode de Kohn Vogelius est plus robuste que la méthode de moindres carrés.

Continuation du travail:

- ▶ Passer à la dimension trois.
- ▶ Passer aux méthodes d'ordre deux (Newton)(cas $\sigma_2 = 0$ a été étudié).
- ▶ Utiliser la méthode Level Set pour plusieurs inclusions.