

CALCULS DE SENSIBILITE PAR DIFFERENTIATION

POUR L'AERODYNAMIQUE

Présentation à CANUM 2006

A. Dervieux, F. Courty, L. Hascoet, B. Koobus, M. Vazquez

1. GRADIENT EN CONTINU

1.1. Problème modèle

$$\Omega_\gamma \subset \mathcal{O}, \forall \gamma \in \mathcal{C}^{l+\alpha}(\partial\Omega_0)$$

$$\partial\Omega_\gamma = \{\vec{x} + \gamma(\vec{x})\vec{n}_0, \vec{x} \in \partial\Omega_0\}.$$

$$-\Delta z(\gamma) = f \text{ on } \Omega_\gamma ; z(\gamma) = 0 \text{ on } \partial\Omega_\gamma.$$

$$j(\gamma) = \frac{1}{2} \|z(\gamma) - z_{target}\|_D^2.$$

$\bar{z} : \gamma \mapsto \bar{z}(\gamma)$ tel que $\bar{z}(\gamma)|_{\Omega_\gamma} = z(\gamma)$

$\mathbf{C} : C^{l+\alpha}(\partial\Omega_0) \rightarrow C^{l-1+\alpha}(\mathcal{O})$

$$\Psi(\gamma, z; \phi_1, \phi_2) = - \int_{\Omega_\gamma} (\Delta z - f) \phi_1 \, dv + \int_{\partial\Omega_\gamma} z \phi_2 \, d\sigma ,$$

$$\Psi(\gamma, \bar{z}(\gamma); \phi_1, \phi_2) = 0 \quad \forall \phi_1, \forall \phi_2 .$$

$$-\Delta \frac{\partial \bar{z}}{\partial \gamma}(\gamma) \cdot \delta \gamma = 0 \quad \text{in } \Omega_\gamma$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \gamma}(\gamma) \cdot \delta \gamma = \frac{\partial \bar{z}(\gamma)}{\partial n_\gamma}(n_\gamma, n_0) \delta \gamma$$

$$-\Delta p(\gamma) = \chi_D(z_{target} - z(\gamma)) ; p(\gamma) = 0 \text{ on } \partial\Omega_\gamma .$$

$$j'(\gamma) \cdot \delta\gamma = \int_{\partial\Omega_\gamma} \frac{\partial z(\gamma)}{\partial n_\gamma} \frac{\partial p(\gamma)}{\partial n_\gamma} \langle \vec{n}_\gamma, \vec{n}_0 \rangle \delta\gamma \, d\partial\Omega_\gamma$$

$$g_{L^2} = \frac{\partial z(\gamma)}{\partial n_\gamma} \frac{\partial p(\gamma)}{\partial n_\gamma} \langle \vec{n}_\gamma, \vec{n}_0 \rangle .$$

$$\gamma^* = \gamma - \rho g_{L^2}$$

$$g_{L^2} : C^{l+\alpha}(\partial\Omega_0) \rightarrow C^{l-1+\alpha}(\partial\Omega_0)$$

Perte d'un ordre de différentiation spatiale.

Problèmes de régularité (2)

Exemple: $j(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\gamma} \left(\frac{\partial^k z(\gamma)}{\partial s^k} - z_{target} \right)^2$

$-\Delta z(\gamma) = f$ on Ω_γ ; $z(\gamma) = 0$ on $\partial\Omega_\gamma$.

$\Rightarrow -\Delta p(\gamma) = 0$ on ω_γ ; $p(\gamma) = -\frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{\partial^k z(\gamma)}{\partial s^k} \right)$ on $\partial\Omega_\gamma$.

$g_{L^2} : C^{l+\alpha}(\partial\Omega_0) \rightarrow C^{l-k-1+\alpha}(\partial\Omega_0)$

Perte de $k + 1$ ordres de différentiation spatiale.

Cf. Arian-Salas, ICASE-97-69

Aérodynamique: eq. d'Euler...Ou régularité (3)

$$W_1 = \rho, W_2 = \rho u, W_3 = \rho v, W_4 = \rho w, W_5 = E$$

$$F(W)_x + G(W)_y + H(W)_z = 0.$$

$$\begin{aligned} (\Psi(\gamma, W), \phi) = & \\ & - \int_{\Omega_\gamma} \left(F(W) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + G(W) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + H(W) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) d\Omega_\gamma \\ & + \int_{\partial\Omega_B} (F_B n^x + G_B n^y + H_B n^z) \cdot \phi d\sigma \\ & + \int_{\partial\Omega_\gamma} p (n_x^\gamma \phi_2 + n_y^\gamma \phi_3 + n_z^\gamma \phi_4) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

$j(\gamma) = J(\gamma, W(\gamma))$ pas toujours différentiable.

Cf. Homescu-Navon, JCP2003.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial W}\right)^* \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \left(\frac{\partial G}{\partial W}\right)^* \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \left(\frac{\partial H}{\partial W}\right)^* \frac{\partial \Pi}{\partial z} = - \frac{\partial J}{\partial W} .$$

$$\Pi_2 n_x^\gamma + \Pi_3 n_y^\gamma + \Pi_4 n_z^\gamma = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_\gamma .$$

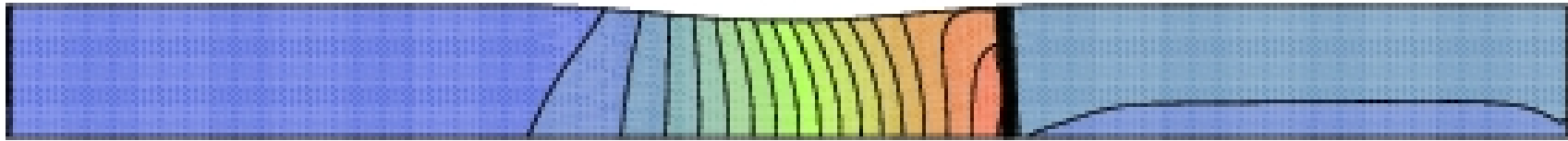
$$\begin{aligned} g_{L^2}(\gamma, W, \Pi) = & \\ & - \left(F(W) \frac{\partial \Pi}{\partial x} + G(W) \frac{\partial \Pi}{\partial y} + H(W) \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) (\vec{n}^\gamma \cdot \vec{V}) \\ & + (\nabla p \Pi + p \nabla \Pi) (\vec{n}^\gamma \cdot \vec{V}) . \end{aligned}$$

$$\gamma = \gamma - \rho g_{L^2}(\gamma, W, \Pi) .$$

A priori perte de dérivation d'un ordre.

Régularité, suite des ennuis

Optimisation d'une tuyère en transsonique, gradient discret

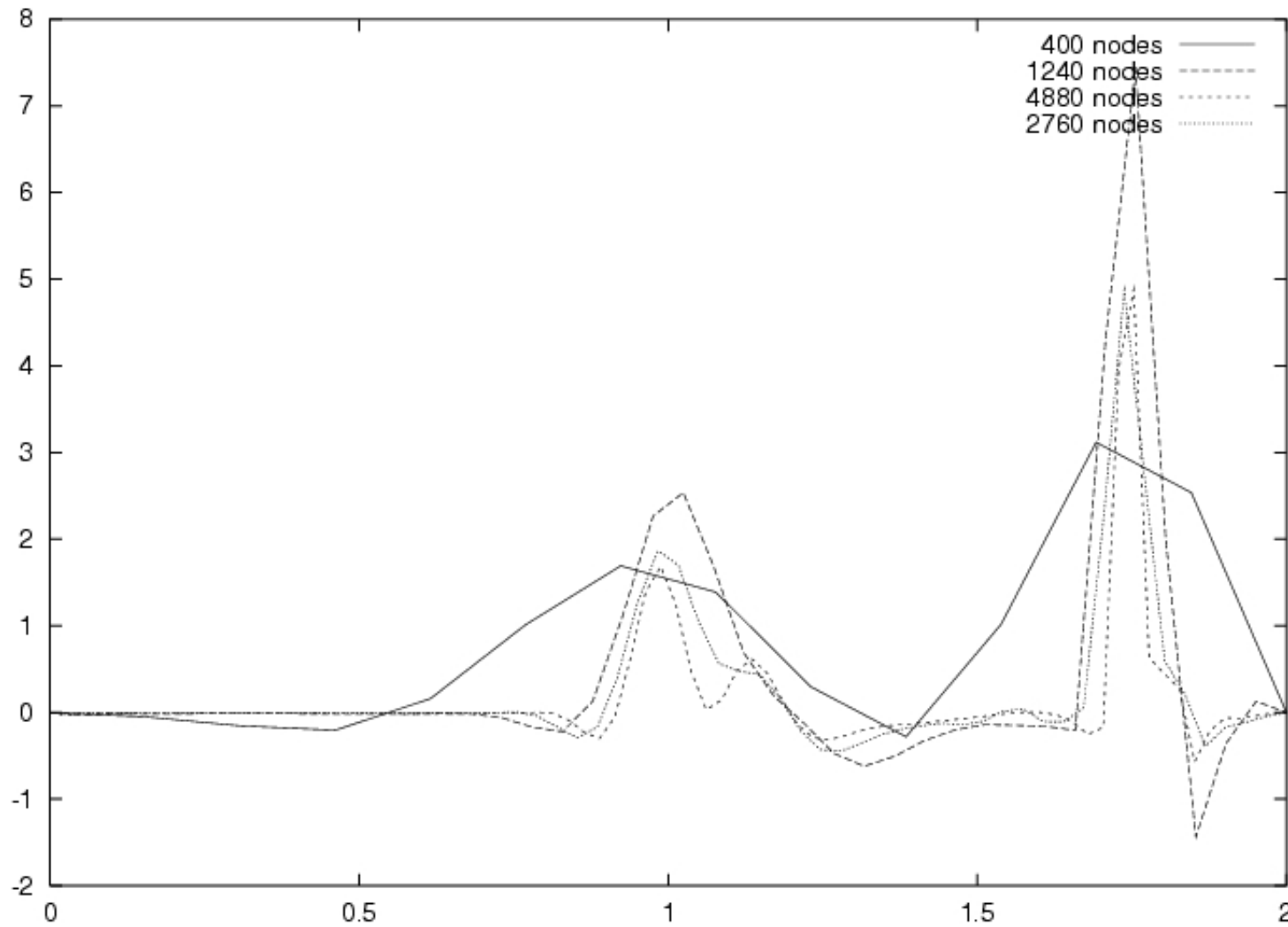


Etat: nombre de Mach



Etat adjoint

Singularités dans l'état adjoint: Giles-Pierce, J.F.M.2001.



Gradient de la fonctionnelle (type déviation avec ect. cible)

2. GRADIENTS DISCRETS

Comment transformer une plateforme de simulation en plateforme de design à large échelle (grand nombre de variables de design)?

- sensibilité du modèle,
- algorithmique.

Option: Différentiation Automatique (DA).

DA: Point de départ:

Logiciel de simulation contenant:

- Un **assemblage**: calculant, à partir des paramètres de design et cinq champs (W_1 à W_5), le résidu des équations d'Euler ("opérateur Ψ "):
$$\text{assemblage-état: } (\gamma, W) \rightarrow \Psi(\gamma, W)$$

- Un **algorithme de résolution-état** (appelant assemblage-état):

résolution-état: $\gamma \rightarrow W(\gamma)$, tel que $\Psi(\gamma, W(\gamma)) = 0$.

- une partie **post-evaluation** qui calcule une fonction coût explicitement à partir du contrôle et de l'état:

évaluation-coût: $(\gamma, W) \rightarrow J(\gamma, W)$.

DA: Assemblage du système d'optimalité

$$u \mapsto v = \Phi(u)$$

$$\begin{aligned} \Phi'(u) = & (\phi'_p \circ \phi_{p-1} \circ \phi_{p-2} \circ \cdots \circ \phi_1(u)) \\ & \cdot (\phi'_{p-1} \circ \phi_{p-2} \circ \cdots \circ \phi_1(u)) \\ & \cdot \cdots \\ & \cdot (\phi'_1(u)) \cdot \end{aligned}$$

Le **mode tangent** appliqué à la routine calculant Φ produit une routine calculant à partir de u et d'une direction arbitraire \dot{u} de même dimension que u la dérivée dans la direction \dot{u} :

$$u, \dot{u} \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u) \dot{u} .$$

La routine résultante réalise la dérivation composée dans le même ordre que la routine initiale et livre une seule donnée réelle si Φ est une fonctionnelle.

Mode Inverse:

$$u \mapsto v = \Phi(u)$$

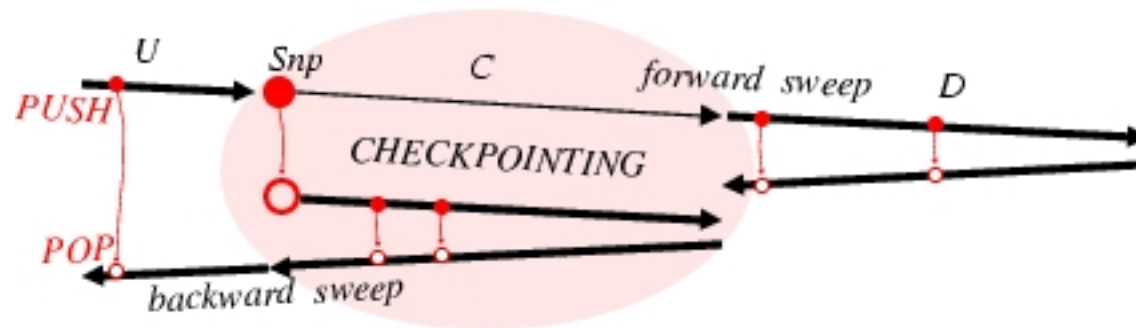
$$\Phi'^*(x) \cdot \bar{y} = \phi_1'^*(x_0) \cdot \phi_2'^*(x_1) \cdot \dots \cdot \phi_p'^*(x_{p-1}) \cdot \bar{y}$$

Le **mode inverse** appliqué à la même routine calculant Φ produit une routine qui calcule à partir de u et d'un vecteur arbitraire \bar{v} de même dimension que v le produit suivant, de même dimension que u :

$$u, \bar{v} \mapsto \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u) \right)^* \bar{v} .$$

Mode inverse, suite:

Dans l'implémentation la moins complexe en calculs, les calculs se déroulent d'abord dans le même sens que la routine initiale en stockant les résultats puis dans le sens inverse en utilisant les données obtenues durant la première phase. Plus généralement, les données sont soit stockées soit recalculées.



Dans le cas d'une fonctionnelle dépendant de n variables, la routine issue du mode inverse donne n résultats et peut être $n/2$ fois plus efficace que le mode tangent.

Hascoet-Pascual: Tapenade manual.<http://www-sop.inria.fr/tropics>

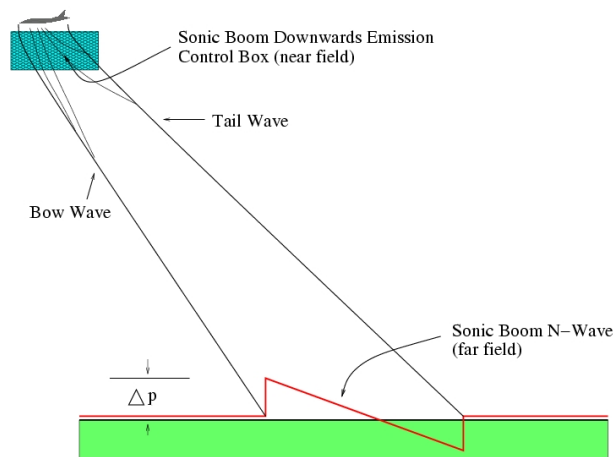
DA, suite: exemple : bang sonique

Contrôle: γ forme de l'avion

Etat: Euler 3D.

Coût (simplifié): une intégrale du gradient de pression (lissé) sous l'avion.

$$j(u) = \alpha_1(C_D - C_D^t)^2 + \alpha_2(C_L - C_L^t)^2 + \alpha_3 \int_{\Omega_B} |\nabla p|^2 dV$$



DA inverse du système d'optimalité

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(Y, u) = 0 \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y}(Y, u) \right)^* \Pi - \left(\frac{\partial J}{\partial Y}(Y, u) \right) = 0 \\ j'(u) = \left(\frac{\partial J}{\partial u}(Y, u) \right) - \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(Y, u) \right)^* \Pi, 1 \right\rangle = 0 \end{array} \right.$$

Calcul du gradient de la fonctionnelle

Un choix délicat:

-(a) appliquer le mode inverse à l'ensemble simulation+coût,

-(b) appliquer le mode inverse seulement aux assemblages.

(a) Peut donner après post-traitement manuel une dérivée dans certains cas.

(b) Plus recommandable. Nécessite d'être complétée par un algorithme pour résoudre l'état adjoint.

Dans tous les cas il faut ajouter encore un algorithme de minimisation: gradient ou SQP.

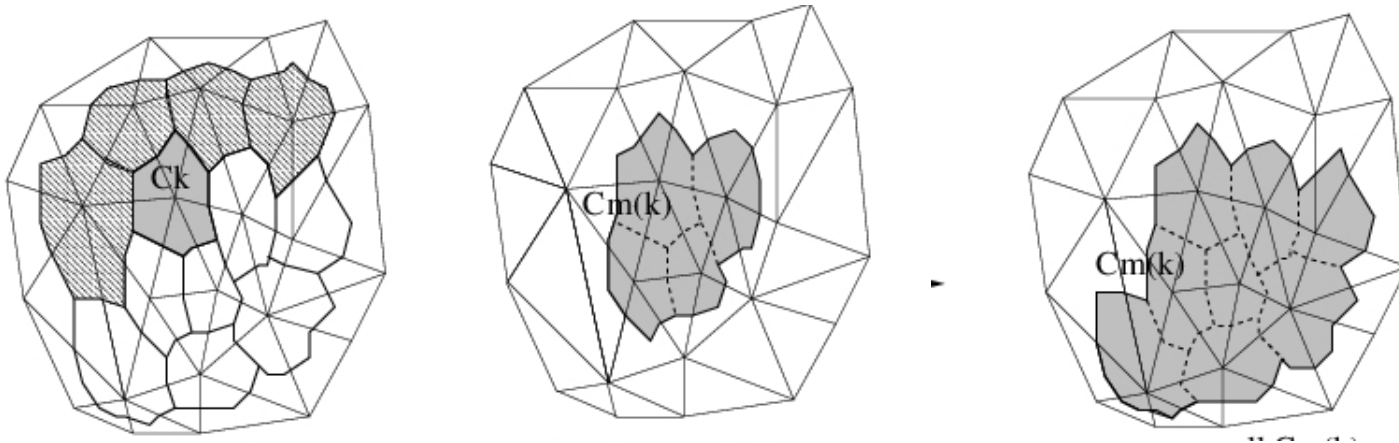
3. PRECONDITIONNEMENT DE L'OPTIMISATION

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n - \rho B g(\gamma_n), \quad (1)$$

$g(\gamma_n)$ est nous l'avons vu un opérateur *non borné* de degré 1. Dans le cas discret, de grandes valeurs propres pour des hautes fréquences vont donner une convergence de l'itération lente de de taux dépendant de la taille de maille. Pour retrouver un taux essentiellement indépendant de la taille de maille, il faut un préconditionneur B qui va régulariser le terme de correction en le réinjectant dans l'espace plus régulier "d'une dérivation".

Préconditionneur multiniveau additif “BPX”

Maillage non-structuré: Agglomération de volume

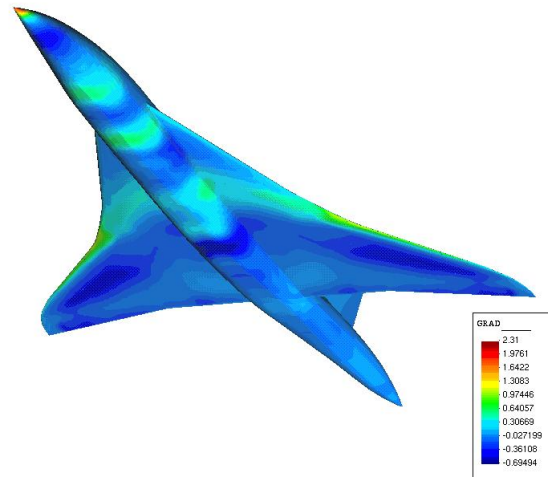


- $B_a = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(a+\alpha)} (Q_k - Q_{k-1})$, où Q_k est une projection sur V_k . B_a est pour $\alpha > 0, a > 0$, un **opérateur compact de degré $-a$** .

Cas du bang supersonique:

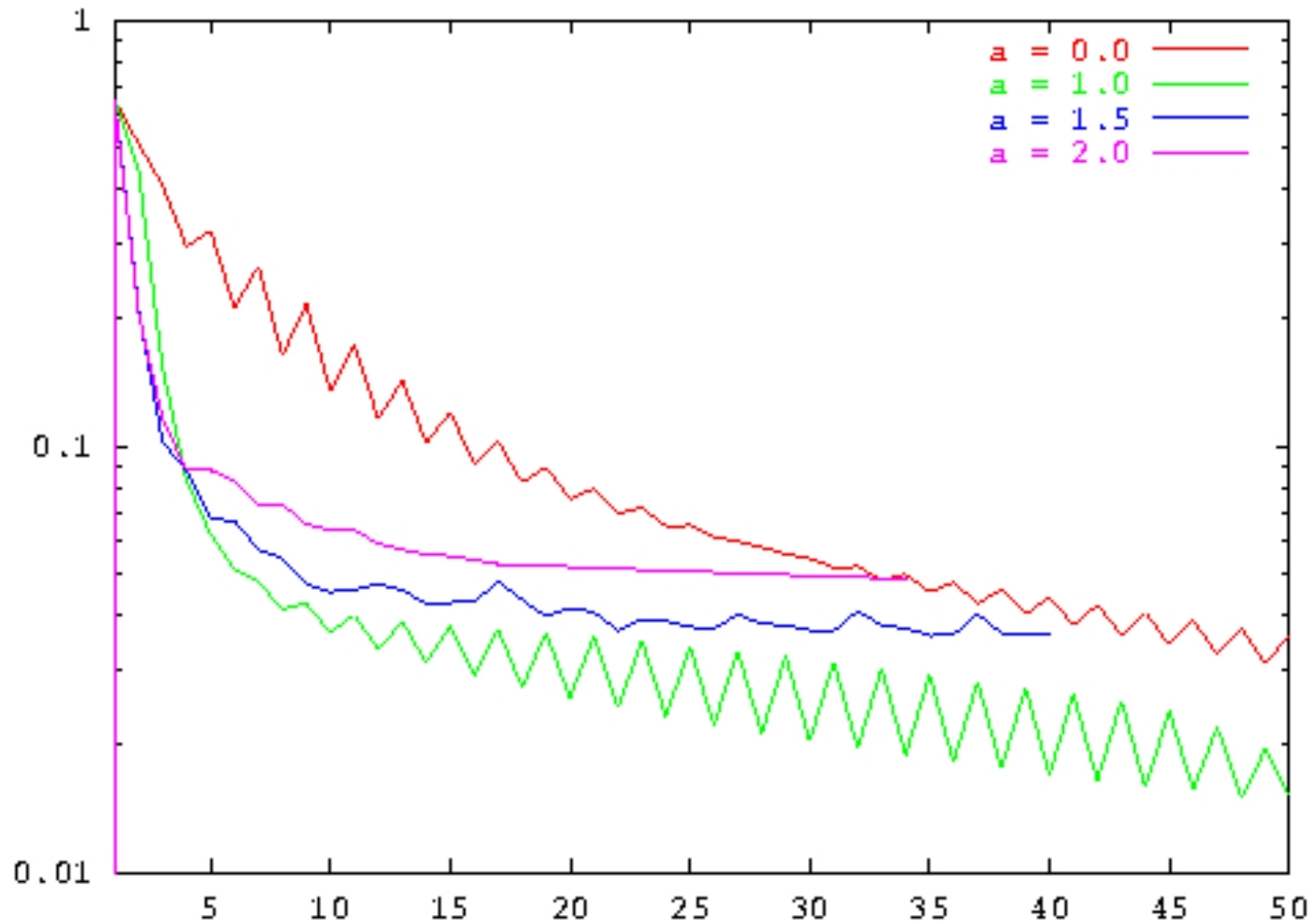
γ : Paramètre de forme, 20,000 inconnues.

$W(\gamma)$: Variable d'état, $5 \times 170,000$ inconnues).

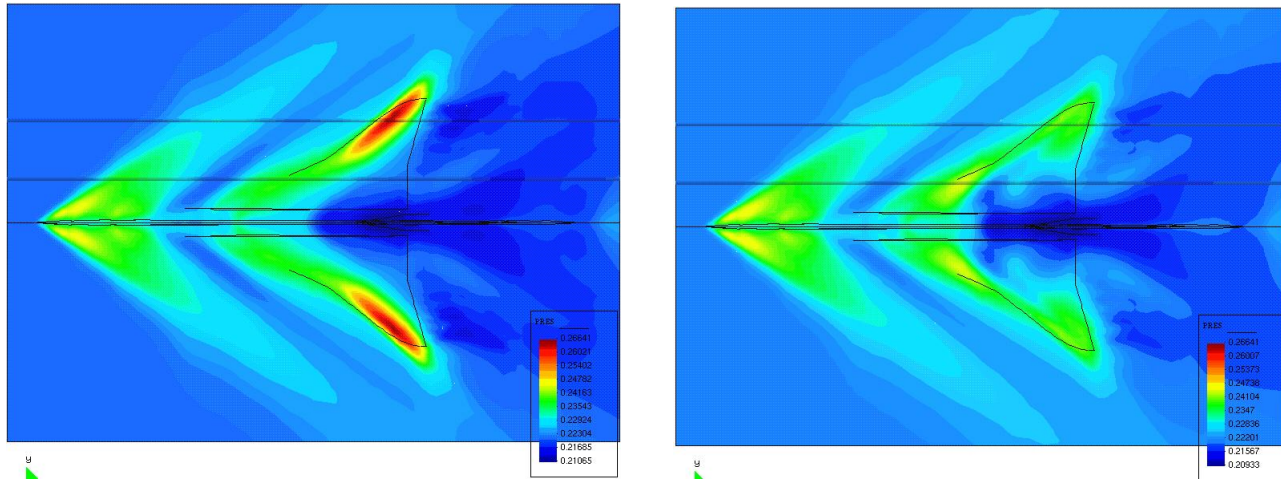


Visualisation du gradient de la fonctionnelle

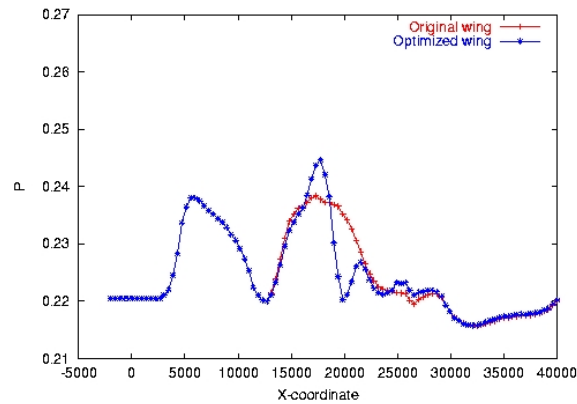
Application du préconditionneur B_a avec différents a



Effet sur l'écoulement



Pression dans un plan sous l'avion après 10 it. d'optimisation



Coupe axiale

4. SYNTHÈSE ET NOUVELLES QUESTIONS

- Calculer des gradients discrets “exacts” est de plus en plus facilité par les outils de Différentiation Automatique.
- Mais la dimension finie ne suffit pas:
- Régularité fonctionnelle du gradient etc.
- Régularité de la fonctionnelle: sous-gradient?

- Vers le retour à la résolution des conditions d’optimalité:
- Le gradient discret converge-t-il vers le gradient continu?(une question intéressante en approche avec maillage adaptatif)