Effet de la perturbation du domaine sur le comportement asymptotique et estimations de convergence des éléments propres de l'opérateur de Laplace

KHELIFI Abdessatar

.

abdessatar.khelifi@fsb.rnu.tn

Dép. Mathématiques - Faculté

des Sciences de Bizerte - Tunisie

CANUM 2006

Plan de l’exposé

- Description du problème
- Travaux antérieures

Plan de l’exposé

- Description du problème
- Travaux antérieures
- Méthodes intégrales
- Régularité et comportement asymptotique
- Estimations de convergence

Plan de l’exposé

- Description du problème
- Travaux antérieures
- Méthodes intégrales
- Régularité et comportement asymptotique
- Estimations de convergence
- Conclusion.

Description de problème

$\Rightarrow$ Problème de valeur propre:

$$\Delta u(\epsilon) + \lambda^2(\epsilon)u(\epsilon) = 0, \quad \text{dans } \Omega_\epsilon, \text{ et } u(\epsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\epsilon. \tag{1}$$

$\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$, domaine borné.

Description de problème

$\Rightarrow$ Problème de valeur propre:

$$\Delta u(\epsilon) + \lambda^2(\epsilon)u(\epsilon) = 0, \quad \text{dans } \Omega_\epsilon, \text{ et } u(\epsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\epsilon. \tag{1}$$

$\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$, domaine borné.
$\partial\Omega_\epsilon = \{\gamma_\epsilon(s,t) = \gamma(s,t) + \epsilon\beta(s,t), \quad (s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi], \epsilon \in \mathbb{R}\}$.
Les fonctions $\gamma(s,t)$ et $\beta(s,t) : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sont analytiques, π-périodique suivant le variable s, et 2π-périodique suivant le variable t.

Description de problème

$\Rrightarrow$ Problème de valeur propre:

$$\Delta u(\epsilon) + \lambda^2(\epsilon)u(\epsilon) = 0, \quad \text{dans } \Omega_\epsilon, \text{ et } u(\epsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\epsilon. \tag{1}$$

$\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$, domaine borné.
$\partial\Omega_\epsilon = \{\gamma_\epsilon(s,t) = \gamma(s,t) + \epsilon\beta(s,t), \quad (s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi], \epsilon \in \mathbb{R}\}$.
Les fonctions $\gamma(s,t)$ et $\beta(s,t) : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sont analytiques, π-périodique suivant le variable s, et 2π-périodique suivant le variable t.

$\Rrightarrow$

$$\Delta u_0 + \lambda_0^2 u_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega_0, \text{ et } u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0. \tag{1}$$

Travaux antérieurs

$\longrightarrow$ F. Rellich (**1969**),

$\longrightarrow$ J.E. Osborn (**1975**),

$\longrightarrow$ T. Kato (**1980**),

Travaux antérieurs

- $\longrightarrow$ F. Rellich (**1969**),
- $\longrightarrow$ J.E. Osborn (**1975**),
- $\longrightarrow$ T. Kato (**1980**),
- $\longrightarrow$ S. Ozawa (**1996**),
- $\longrightarrow$ O. Bruno et F.Reitich (**2001**),
- $\longrightarrow$ K. Neymeyer (**2002**),
- $\longrightarrow$ H. Ammari et F.Triki (**2003**),

Travaux antérieurs

- $\longrightarrow$ F. Rellich (**1969**),
- $\longrightarrow$ J.E. Osborn (**1975**),
- $\longrightarrow$ T. Kato (**1980**),
- $\longrightarrow$ S. Ozawa (**1996**),
- $\longrightarrow$ O. Bruno et F.Reitich (**2001**),
- $\longrightarrow$ K. Neymeyer (**2002**),
- $\longrightarrow$ H. Ammari et F.Triki (**2003**),
- $\longrightarrow$ Ammari et S. Moskow (**2003**),
- $\longrightarrow$ M. Lanza De Cristoforis et P. D. Lamberti (**2004**)...

Méthodes intégrales

Théorème 1(Kato, Rellich): *Il existe $\epsilon_0 > 0$, tel que pour $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, la famille "$\lambda_0$-group" formée des $m-$valeurs, $\left(\lambda_j^2(\epsilon)\right)_{1\leq j\leq m}$: Comptés suivant la multiplicité. En plus, ce sont des fonctions analytiques en ϵ et vérif iant, $\lambda_j^2(0) = \lambda_0^2$, $j = 1\cdots m$. Les fonctions propres normalisées associées au "λ_0-group" des valeurs propres sont analytiques et leurs valeurs en 0 $\{u_0^j\}_{1\leq j\leq m}$ sont des solutions linéairement indépendantes.*

Méthodes intégrales

Théorème 1(Kato, Rellich): *Il existe $\epsilon_0 > 0$, tel que pour $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, la famille "$\lambda_0$-group" formée des $m-$valeurs, $\left(\lambda_j^2(\epsilon)\right)_{1\leq j\leq m}$: Comptés suivant la multiplicité. En plus, ce sont des fonctions analytiques en ϵ et vérif iant, $\lambda_j^2(0) = \lambda_0^2$, $j = 1\cdots m$. Les fonctions propres normalisées associées au "λ_0-group" des valeurs propres sont analytiques et leurs valeurs en 0 $\{u_0^j\}_{1\leq j\leq m}$ sont des solutions linéairement indépendantes.*

$\Rightarrow$ La solution fondamentale G associée à l'opérateur $\Delta + k^2$, dans $\mathbb{R}^3$ est:

$$G(x, y) = -\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}. \tag{1}$$

Méthodes intégrales (suite)

⇒ On introduit l'opérateur:

$$S(\lambda) : H^{-1/2}(\partial\Omega_\epsilon) \to H^{1/2}(\partial\Omega_\epsilon)$$

où

$$S(\lambda) : g \to \int_{\partial\Omega_\epsilon} G(\cdot, y) g(y) d\sigma(y).$$

Pour toute fonction g et pour $x \in \partial\Omega_\epsilon$,

$$S(\lambda)g(x) = (Sl(\lambda)g)_+(x) = (Sl(\lambda)g)_-(x)$$

Méthodes intégrales (suite)

$\Rightarrow$ On introduit l'opérateur:

$$S(\lambda) : H^{-1/2}(\partial\Omega_\epsilon) \to H^{1/2}(\partial\Omega_\epsilon)$$

où

$$S(\lambda) : g \to \int_{\partial\Omega_\epsilon} G(\cdot, y)g(y)d\sigma(y).$$

Pour toute fonction g et pour $x \in \partial\Omega_\epsilon$,

$$S(\lambda)g(x) = (Sl(\lambda)g)_+(x) = (Sl(\lambda)g)_-(x)$$

$Sl(\lambda)$ est l'opérateur de simple couche (voir:**J.-C. Nédélec, 2001 et D. Colton et R. Kress, 1983**).

On pose, $H^\varsigma_\sharp(]0, \pi[\times]0, 2\pi[) = H^\varsigma(\mathbb{R}^2/]0, \pi[\times]0, 2\pi[)$, pour $\varsigma \in \mathbb{R}$.

Méthodes intégrales (suite)

$\longrightarrow$ Changement de variables, (**M.E.Taylor, 1996**) on aura:

Proposition 1: *L'opérateur*

$A_\epsilon(\lambda) : H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[) \longrightarrow H_\sharp^{1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$*:*

$$A_\epsilon(\lambda)f(s,t) = \Big(S(\lambda)f({\gamma_\epsilon}^{-1})\Big)(\gamma_\epsilon(s,t)) =$$

Méthodes intégrales (suite)

$\longrightarrow$ Changement de variables, (**M.E.Taylor, 1996**) on aura:

Proposition 1: *L'opérateur*

$A_\epsilon(\lambda) : H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[) \longrightarrow H_\sharp^{1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$*:*

$$A_\epsilon(\lambda)f(s,t) = \Big(S(\lambda)f({\gamma_\epsilon}^{-1})\Big)(\gamma_\epsilon(s,t)) =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(\gamma_\epsilon(s,t),\gamma_\epsilon(s',t'))|\nabla\gamma_\epsilon(s',t')|f(s',t')ds'dt',$$

Méthodes intégrales (suite)

$\longrightarrow$ Changement de variables, (**M.E.Taylor, 1996**) on aura:

Proposition 1: *L'opérateur*

$A_\epsilon(\lambda) : H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[) \longrightarrow H_\sharp^{1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$*:*

$$A_\epsilon(\lambda)f(s,t) = \Big(S(\lambda)f(\gamma_\epsilon{}^{-1})\Big)(\gamma_\epsilon(s,t)) =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(\gamma_\epsilon(s,t),\gamma_\epsilon(s',t'))|\nabla\gamma_\epsilon(s',t')|f(s',t')ds'dt',$$

pour $f \in H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$ *est analytique de type Fredholm d'indice 0. En plus,* $A_\epsilon^{-1}(\lambda)$ *est méromorphique et ses pôles sont dans* $\Big\{\Im(z) \leq 0\Big\}$*.*

Régularité et comportement asymptotique

$\Rightarrow$ Introduisons les polynômes:

$$\mathcal{Q}_\epsilon^j(\lambda) = \Pi_{i=1, i\neq j}^{\tau_\epsilon}\Big(\frac{\lambda - \lambda_i(\epsilon)}{\lambda_j(\epsilon) - \lambda_i(\epsilon)}\Big), \quad j = 1, \cdots, \tau_\epsilon \leq m.$$

Dans l'esprit des résultats de (**Ammari,2003**) en dimension 2:

Régularité et comportement asymptotique

$\Rightarrow$ Introduisons les polynômes:

$$\mathcal{Q}_\epsilon^j(\lambda) = \Pi_{i=1, i\neq j}^{\tau_\epsilon}\left(\frac{\lambda - \lambda_i(\epsilon)}{\lambda_j(\epsilon) - \lambda_i(\epsilon)}\right), \quad j = 1, \cdots, \tau_\epsilon \leq m.$$

Dans l'esprit des résultats de (**Ammari,2003**) en dimension 2:

Proposition 2: *Il existe une constante $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$ tel que pour $\epsilon \in]-\epsilon_1, \epsilon_1[$, la projection orthogonale de $H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$ sur $Ker(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))$ est donnée par:*

$$P_j(\epsilon) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_{r_0}} \mathcal{Q}_\epsilon^j(\lambda) A_\epsilon^{-1}(\lambda)\partial_\lambda A_\epsilon(\lambda) d\lambda.$$

On peut construire une base orthonormale de $Ker(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))$ qui soit analytique en $(s,t,\epsilon) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]-\epsilon_1, \epsilon_1[$.

Régularité et comportement asymptotique (suite)

Théorème 2: *Soit $\mathcal{K}_0$ un voisinage de $\overline{\Omega}_0$ dans $\mathbb{R}^3$. Il existe une constante $\epsilon_2 > 0$ choisit de sorte que la base orthonormale des fonctions propres $\big(u_j(\epsilon)\big)_j$ associées aux "λ_0-group", $(\lambda_j^2(\epsilon))_j$, dans $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ dépend analytiquement de $(x,\epsilon) \in \mathcal{K}_0 \times]-\epsilon_2, \epsilon_2[$. De plus, ces fonctions propres vérif ient le développement asymptotique uniforme suivant:*

$$u_j(\epsilon) = u_0^j + \sum_{n \geq 1} u_{j,n}\epsilon^n,$$

avec la famille $\{u_0^j\}_j$ forme une base des fonctions propres associées à λ_0^2 et normalisées dans $L^2(\Omega_0)$.

Régularité et comportement asymptotique (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: Proposition 2 $\dashrightarrow$ il existe une base orthonormale

$(\phi_{i,j})_{1\leq i\leq M(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))}(s,t;\epsilon) \in H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$ du $Ker(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))$, qui est analytique dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]-\epsilon_3,\epsilon_3[$.

Régularité et comportement asymptotique (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: Proposition 2 $\dashrightarrow$ il existe une base orthonormale $(\phi_{i,j})_{1\leq i\leq M(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))}(s,t;\epsilon) \in H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$ du $Ker(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))$, qui est analytique dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]-\epsilon_3,\epsilon_3[$. $Sl(\lambda_j(\epsilon))\phi_{i,j}(\gamma^{-1},\epsilon)$ forme une base de fonctions propres associés au problème (1) et le procede d'orthogonalisation de Shmidt qui donne le résultat.

Régularité et comportement asymptotique (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: Proposition 2 $\dashrightarrow$ il existe une base orthonormale $(\phi_{i,j})_{1\leq i\leq M(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))}(s,t;\epsilon) \in H_\sharp^{-1/2}(]0,\pi[\times]0,2\pi[)$ du $Ker(A_\epsilon(\lambda_j(\epsilon)))$, qui est analytique dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]-\epsilon_3,\epsilon_3[$. $Sl(\lambda_j(\epsilon))\phi_{i,j}(\gamma^{-1},\epsilon)$ forme une base de fonctions propres associés au problème (1) et le procede d'orthogonalisation de Shmidt qui donne le résultat.

Lemme 1: *Les fonctions données par,*

$$U_{i,j}(\epsilon)(x) = Sl(\lambda_j(\epsilon))\phi_{i,j}(\gamma^{-1},\epsilon)$$

sont analytiques en $(x,\epsilon) \in \mathcal{K}_0\times]-\epsilon_3,\epsilon_3[$.

Régularité et comportement asymptotique (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: Théorème de Cauchy-Kawaleski. Il reste à justif ier le comportement asymptotique de ces fonctions lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$.

$$U(\epsilon)(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(\lambda(\epsilon), |x - \gamma_\epsilon(s,t)|)\phi(x,\epsilon)|\nabla\gamma_\epsilon(s,t)|dsdt. \quad (2)$$

Régularité et comportement asymptotique (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: Théorème de Cauchy-Kawaleski. Il reste à justif ier le comportement asymptotique de ces fonctions lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$.

$$U(\epsilon)(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(\lambda(\epsilon), |x - \gamma_\epsilon(s,t)|)\phi(x,\epsilon)|\nabla\gamma_\epsilon(s,t)|dsdt. \quad (2)$$

D'autre part,

$$G(\lambda(\epsilon), |x - \gamma_\epsilon(s,t)|)|\nabla\gamma_\epsilon(s,t)| = G(\lambda_0, |x - \gamma(s,t)||\nabla\gamma(s,t)| +$$

$$\sum_{k\geq 1} \epsilon^k G_k(x,s,t),$$

Régularité et comportement asymptotique (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: Théorème de Cauchy-Kawaleski. Il reste à justif ier le comportement asymptotique de ces fonctions lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$.

$$U(\epsilon)(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(\lambda(\epsilon), |x - \gamma_\epsilon(s,t)|)\phi(x,\epsilon)|\nabla\gamma_\epsilon(s,t)|dsdt. \quad (2)$$

D'autre part,

$$G(\lambda(\epsilon), |x - \gamma_\epsilon(s,t)|)|\nabla\gamma_\epsilon(s,t)| = G(\lambda_0, |x - \gamma(s,t)||\nabla\gamma(s,t)| +$$

$$\sum_{k\geq 1} \epsilon^k G_k(x,s,t),$$

uniformément pour $x \in \overline{\mathcal{K}}_0$ et $(s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.

Régularité et comportement asymptotique (suite)

Proposition 2 $\Rightarrow$

$$\phi(s,t,\epsilon) = \phi(s,t)(= \phi_0(s,t)) + \sum_{k\geq 1} \epsilon^k \phi_k(s,t),$$

uniformément en $(s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.

Régularité et comportement asymptotique (suite)

Proposition 2 $\Rightarrow$

$$\phi(s,t,\epsilon) = \phi(s,t)(= \phi_0(s,t)) + \sum_{k\geq 1} \epsilon^k \phi_k(s,t),$$

uniformément en $(s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.
Donc,

$$U(\epsilon)(x) = U(0)(x) + \sum_{k=1} \epsilon^k [\sum_{n=1}^{k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \phi_{k-n}(s,t) G_n(x,s,t) ds dt].$$

Estimations de convergence

$$u_j(\epsilon) = u_0^j + \epsilon u_1^j + \cdots$$

$$\lambda_j^2(\epsilon) = \lambda_0^2 + \epsilon \lambda_1 + \cdots$$

Estimations de convergence

$$u_j(\epsilon) = u_0^j + \epsilon u_1^j + \cdots$$

$$\lambda_j^2(\epsilon) = \lambda_0^2 + \epsilon\lambda_1 + \cdots$$

Lemme 2: *Soient les fonctions $u_j(\epsilon)$ et u_0^j, pour $j = 1, \cdots, m$, données par Théorème 2. Alors:*

$$\|\nabla(u_j(\epsilon) - u_0^j)\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq C_j|\Omega_\epsilon \backslash \Omega_0|^{1/2},$$

C_j *dépend de* λ_0 *et de* u_0^j *mais indṕendant de* ϵ.

Estimations de convergence (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve:
Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $\Omega_0 \subset \Omega_\epsilon$ et $\partial\Omega_\epsilon \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$, pour $0 < \epsilon \leq \alpha_1$.
On déf inie l'ouvert borné, $\tilde{\Omega}_\epsilon = \Omega_\epsilon \backslash \overline{\Omega}_0$ et on pose:
$w(\epsilon) = u_j(\epsilon) - u_0^j$ pour $0 < \epsilon \leq \inf(\epsilon_2, \alpha_1)$

Estimations de convergence (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve:
Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $\Omega_0 \subset \Omega_\epsilon$ et $\partial\Omega_\epsilon \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$, pour $0 < \epsilon \leq \alpha_1$.
On déf inie l'ouvert borné, $\tilde{\Omega}_\epsilon = \Omega_\epsilon \backslash \overline{\Omega}_0$ et on pose:
$w(\epsilon) = u_j(\epsilon) - u_0^j$ pour $0 < \epsilon \leq \inf(\epsilon_2, \alpha_1)$
Problèmes (1) et (2) $\Rightarrow$,

$$-\Delta w = \lambda^2 w + (\lambda^2 - \lambda_0^2) u_0^j \quad \text{dans } \tilde{\Omega}_\epsilon \tag{2}$$

Estimations de convergence (suite)

- On pose,

$$F(w) = \lambda^2 w + (\lambda^2 - \lambda_0^2) u_0^j,$$

on a:

$$\|F(w(\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq (1 + 2\lambda_0^2)\|u_0^j\|_{L^\infty(\Omega_0)}.$$

Estimations de convergence (suite)

- On pose,

$$F(w) = \lambda^2 w + (\lambda^2 - \lambda_0^2) u_0^j,$$

on a:

$$\|F(w(\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq (1 + 2\lambda_0^2)\|u_0^j\|_{L^\infty(\Omega_0)}.$$

D'autre part, $-\Delta w(\epsilon) = F(w(\epsilon))$, dans $\tilde{\Omega}_\epsilon$.

Estimations de convergence (suite)

⇢ On pose,

$$F(w) = \lambda^2 w + (\lambda^2 - \lambda_0^2) u_0^j,$$

on a:

$$\|F(w(\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq (1 + 2\lambda_0^2)\|u_0^j\|_{L^\infty(\Omega_0)}.$$

D'autre part, $-\Delta w(\epsilon) = F(w(\epsilon))$, dans $\tilde{\Omega}_\epsilon$.
I.P.P $\Rightarrow$

$$\forall v \in H_0^1(\tilde{\Omega}_\epsilon), \quad \int_{\tilde{\Omega}_\epsilon} \nabla w(\epsilon) \bar{\nabla} v dx = \int_{\tilde{\Omega}_\epsilon} F(w(\epsilon)) \bar{v} dx$$

Estimations de convergence (suite)

$\dashrightarrow$ On pose,

$$F(w) = \lambda^2 w + (\lambda^2 - \lambda_0^2) u_0^j,$$

on a:

$$\|F(w(\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq (1 + 2\lambda_0^2) \|u_0^j\|_{L^\infty(\Omega_0)}.$$

D'autre part, $-\Delta w(\epsilon) = F(w(\epsilon))$, dans $\tilde{\Omega}_\epsilon$.
I.P.P $\Rightarrow$

$$\forall v \in H_0^1(\tilde{\Omega}_\epsilon), \quad \int_{\tilde{\Omega}_\epsilon} \nabla w(\epsilon) \bar{\nabla} v dx = \int_{\tilde{\Omega}_\epsilon} F(w(\epsilon)) \bar{v} dx$$

$\Rightarrow$ $\exists C_0 > 0$ telle que

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq C_0 (1 + 2\lambda_0^2) |\tilde{\Omega}_\epsilon|^{1/2} \|u_0^j\|_{L^\infty(\Omega_0)}.$$

Estimations de convergence (suite)

Théorème 3: *Soient les fonctions γ, β et Ω_ϵ déf inies comme precedement et soient les fonctions $u_j(\epsilon)$ et u_0^j, pour $j = 1, \cdots, m$, données par Théorème 2. Alors,*

(i) $\exists\, 0 < \epsilon_3 \leq 1/M$, $M = \max|\beta(s,t)|$ *et une constante positive* $k_j^{(1)}$ *qui dépend de* λ_0, u_0^j, $|\gamma|$ *et* M *mais indépendante de* ϵ *telle que:*

$$\|u_j(\epsilon) - u_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq k_j^{(1)} \epsilon^{1/2}, \quad \textit{pour } 0 < \epsilon \leq \epsilon_3.$$

Estimations de convergence (suite)

Théorème 3: *Soient les fonctions γ, β et Ω_ϵ déf inies comme precedement et soient les fonctions $u_j(\epsilon)$ et u_0^j, pour $j = 1, \cdots, m$, données par Théorème 2. Alors,*

(i) $\exists\, 0 < \epsilon_3 \leq 1/M$, $M = \max|\beta(s,t)|$ *et une constante positive* $k_j^{(1)}$ *qui dépend de* λ_0, u_0^j, $|\gamma|$ *et* M *mais indépendante de* ϵ *telle que:*

$$\|u_j(\epsilon) - u_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq k_j^{(1)} \epsilon^{1/2}, \quad \text{pour } 0 < \epsilon \leq \epsilon_3.$$

(ii) $\exists\, 0 < \epsilon_4 \leq \epsilon_3$ *et une constante* $k_j^{(2)}$ *telle que pour* $j = 1, \cdots, m$*:*

$$|\lambda_j^2(\epsilon) - \lambda_0^2| \leq k_j^{(2)} \epsilon^{\frac{5}{2m}}, \quad \text{pour } 0 < \epsilon \leq \epsilon_4.$$

Estimations de convergence (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: (i) Supposons que Ω_0 est une sphère de rayon $\varrho_0 > 0$. La preuve s'achève une fois qu'on applique l'inégalité de Poincaré sur Lemme 2.

Estimations de convergence (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: (i) Supposons que Ω_0 est une sphère de rayon $\varrho_0 > 0$. La preuve s'achève une fois qu'on applique l'inégalité de Poincaré sur Lemme 2.
(ii) Pour $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$, on introduit l'opérateur $T_\epsilon \varphi = v_\epsilon$ ou v_ϵ solution du problème:

$$-\Delta v_\epsilon = \varphi \quad \text{dans } \Omega_\epsilon, \quad v_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\epsilon. \tag{2}$$

Estimations de convergence (suite)

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: (i) Supposons que Ω_0 est une sphère de rayon $\varrho_0 > 0$. La preuve s'achève une fois qu'on applique l'inégalité de Poincaré sur Lemme 2.
(ii) Pour $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$, on introduit l'opérateur $T_\epsilon\varphi = v_\epsilon$ ou v_ϵ solution du problème:

$$-\Delta v_\epsilon = \varphi \quad \text{dans } \Omega_\epsilon, \qquad v_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\epsilon. \tag{2}$$

De même, on introduit l'opérateur $T_0\varphi = v_0$.

Estimations de convergence (suite)

⇢ On pose

$$\mu_0 = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad \text{et } \mu_j(\epsilon) = \frac{1}{\lambda_j^2(\epsilon)}.$$

Remarquons que $(\mu_j(\epsilon), u_j(\epsilon))$ (resp.(μ_0, u_0^j)) est un élément propre de T_ϵ (resp. de T_0).

Estimations de convergence (suite)

⇢ On pose

$$\mu_0 = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad \text{et } \mu_j(\epsilon) = \frac{1}{\lambda_j^2(\epsilon)}.$$

Remarquons que $(\mu_j(\epsilon), u_j(\epsilon))$ (resp.(μ_0, u_0^j)) est un élément propre de T_ϵ (resp. de T_0).

⇢ On introduit:

$$\hat{\mu}(\epsilon) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j^2(\epsilon)}. \tag{2}$$

Estimations de convergence (suite)

Lemme 3: *Soit ϵ_3 la constante donnée par* **(i)**. *Alors:*

1/ $\exists\, K_1$ *telle que*

$$|\mu_0 - \hat{\mu}(\epsilon)| \leq K_1 \epsilon^{1/2}.$$

Estimations de convergence (suite)

Lemme 3: *Soit ϵ_3 la constante donnée par* **(i)**. *Alors:*

1/ $\exists\, K_1$ *telle que*

$$|\mu_0 - \hat{\mu}(\epsilon)| \leq K_1 \epsilon^{1/2}.$$

2/ $\exists\, K_2$ *telle que pour tout* $j = 1, \cdots, m,$

$$|\mu_j(\epsilon) - \mu_0|^m \leq K_2 \epsilon^{5/2}.$$

Estimations de convergence (suite)

Lemme 3: *Soit* ϵ_3 *la constante donnée par* **(i)**. *Alors:*

1/ $\exists\, K_1$ *telle que*

$$|\mu_0 - \hat{\mu}(\epsilon)| \leq K_1 \epsilon^{1/2}.$$

2/ $\exists\, K_2$ *telle que pour tout* $j = 1, \cdots, m$,

$$|\mu_j(\epsilon) - \mu_0|^m \leq K_2 \epsilon^{5/2}.$$

$\hookrightarrow$ Idée de la preuve: la famille $\{u_0^j\}$ est orthonormale:

$$\begin{aligned} \|T_\epsilon - T_0\|_{R(P_j(0))} &= \max_j \|T_\epsilon u_0^j - T_0 u_0^j\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq \max_j \|T_\epsilon u_0^j - T_0 u_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}. \end{aligned}$$

Estimations de convergence (suite)

En posant, $z_j(\epsilon) = \frac{1}{\lambda_j^2(\epsilon)} u_j(\epsilon)$ et $z_0^j = \frac{1}{\lambda_0^2} u_0^j$ $\dashrightarrow$ z_j et z_0^j sont solutions de (1) et (2).

Estimations de convergence (suite)

En posant, $z_j(\epsilon) = \frac{1}{\lambda_j^2(\epsilon)} u_j(\epsilon)$ et $z_0^j = \frac{1}{\lambda_0^2} u_0^j$ $\dashrightarrow$ z_j et z_0^j sont solutions de (1) et (2).

(i) $\Rightarrow$

$$\|z_j(\epsilon) - z_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq k_j^{(1)} \epsilon^{1/2}.$$

Par des raisons de compacité sur T_ϵ et d'après (i), on a:

$$\|T_\epsilon u_0^j - T_0 u_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq k_j^{(1)} (1 + Cte) \epsilon^{1/2}. \tag{2}$$

Estimations de convergence (suite)

En posant, $z_j(\epsilon) = \frac{1}{\lambda_j^2(\epsilon)} u_j(\epsilon)$ et $z_0^j = \frac{1}{\lambda_0^2} u_0^j$ $\dashrightarrow$ z_j et z_0^j sont solutions de (1) et (2).

(i) $\Rightarrow$

$$\|z_j(\epsilon) - z_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq k_j^{(1)} \epsilon^{1/2}.$$

Par des raisons de compacité sur T_ϵ et d'après (i), on a:

$$\|T_\epsilon u_0^j - T_0 u_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq k_j^{(1)} (1 + Cte) \epsilon^{1/2}. \tag{2}$$

Introduisant cette relation dans le théorème d'Osborn:

$$\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j^2(\epsilon)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \langle (T_0 - T_\epsilon) u_0^j, u_0^j \rangle + \epsilon^{1/2} O(1).$$

La preuve s'achève par re-application de la relation (2).

Estimations de convergence (suite)

Soit $T_\epsilon(y_\epsilon) = \mu_j(\epsilon) y_\epsilon$ telle que, $\|y_\epsilon\|_{L^2} = 1$. On choisit $\varpi^* \in Ker((\mu_0 - T_0^*)^m)$ de telle sorte que $\langle y_\epsilon, \varpi^* \rangle = 1$

Estimations de convergence (suite)

Soit $T_\epsilon(y_\epsilon) = \mu_j(\epsilon)y_\epsilon$ telle que, $\|y_\epsilon\|_{L^2} = 1$. On choisit $\varpi^* \in Ker((\mu_0 - T_0^*)^m)$ de telle sorte que $\langle y_\epsilon, \varpi^* \rangle = 1 \Rightarrow$

$$|\langle(\mu_0 - \mu_j(\epsilon))^m \varpi^*, y_\epsilon\rangle| = |\langle(\mu_0 - \mu_j(\epsilon))^m \varpi^*, y_\epsilon\rangle - \langle(\mu_0 - T_0^*)^m \varpi^*, y_\epsilon\rangle|$$

Estimations de convergence (suite)

Soit $T_\epsilon(y_\epsilon) = \mu_j(\epsilon) y_\epsilon$ telle que, $\|y_\epsilon\|_{L^2} = 1$. On choisit $\varpi^* \in Ker((\mu_0 - T_0^*)^m)$ de telle sorte que $\langle y_\epsilon, \varpi^* \rangle = 1 \Rightarrow$

$$|\langle (\mu_0 - \mu_j(\epsilon))^m \varpi^*, y_\epsilon \rangle| = |\langle (\mu_0 - \mu_j(\epsilon))^m \varpi^*, y_\epsilon \rangle - \langle (\mu_0 - T_0^*)^m \varpi^*, y_\epsilon \rangle|$$

et donc,

$$|\mu_0 - \mu_j(\epsilon)|^m \leq |\mu_0 - \hat{\mu}(\epsilon)| \sum_{l=0}^{m-1} \|\mu_0 - T_0^*\|^{m-1-l} \times \tag{2}$$

$$\max_{\|\psi^*\|=1} |\langle (\mu_j(\epsilon) - T_0) y_\epsilon, \psi^* \rangle|.$$

Estimations de convergence (suite)

D'autre part, $\forall \psi^* \in R(P_j(0)^*)$, avec $\|\psi^*\| = 1$, on peut écrire (en utilisant l'estimation d'Osborn):

$$|\langle(\mu_j(\epsilon) - T_0)y_\epsilon, \psi^*\rangle| = |\langle(P_j(\epsilon))^{-1}P_j(\epsilon)(T_\epsilon - T_0)y_\epsilon, \psi^*\rangle| =$$

$$|\langle(T_\epsilon - T_0)y_\epsilon, (P_j(\epsilon)^{-1}P_j(\epsilon))^*\psi^*\rangle|$$

$$\leq c.\epsilon^2\|y_\epsilon\|_{L^2}.\|(P_j(\epsilon)^{-1}P_j(\epsilon))^*\psi^*\|_{L^2},$$

Estimations de convergence (suite)

D'autre part, $\forall \psi^* \in R(P_j(0)^*)$, avec $\|\psi^*\| = 1$, on peut écrire (en utilisant l'estimation d'Osborn):

$$|\langle (\mu_j(\epsilon) - T_0)y_\epsilon, \psi^* \rangle| = |\langle (P_j(\epsilon))^{-1} P_j(\epsilon)(T_\epsilon - T_0)y_\epsilon, \psi^* \rangle| =$$

$$|\langle (T_\epsilon - T_0)y_\epsilon, (P_j(\epsilon)^{-1} P_j(\epsilon))^* \psi^* \rangle|$$

$$\leq c.\epsilon^2 \|y_\epsilon\|_{L^2}.\|(P_j(\epsilon)^{-1} P_j(\epsilon))^* \psi^* \|_{L^2},$$

où c est une constante positive.

Estimations de convergence (suite)

D'autre part, $\forall \psi^* \in R(P_j(0)^*)$, avec $\|\psi^*\| = 1$, on peut écrire (en utilisant l'estimation d'Osborn):

$$|\langle(\mu_j(\epsilon) - T_0)y_\epsilon, \psi^*\rangle| = |\langle(P_j(\epsilon))^{-1}P_j(\epsilon)(T_\epsilon - T_0)y_\epsilon, \psi^*\rangle| =$$

$$|\langle(T_\epsilon - T_0)y_\epsilon, (P_j(\epsilon)^{-1}P_j(\epsilon))^*\psi^*\rangle|$$

$$\leq c.\epsilon^2\|y_\epsilon\|_{L^2}.\|(P_j(\epsilon)^{-1}P_j(\epsilon))^*\psi^*\|_{L^2},$$

où c est une constante positive.

La norme $\|P_j(\epsilon)\|$ est bornée en ϵ. D'autre part, pour ϵ assez petit et pour $f \in R(P_j(0))$ avec $\|f\| = 1$,

Estimations de convergence (suite)

on a

$$1 - \|P_j(\epsilon)f\| = \|P_j(0)f\| - \|P_j(\epsilon)f\| \le \|(P_j(0) - P_j(\epsilon))f\| \le \frac{1}{2}$$

Estimations de convergence (suite)

on a

$$1 - \|P_j(\epsilon)f\| = \|P_j(0)f\| - \|P_j(\epsilon)f\| \leq \|(P_j(0) - P_j(\epsilon))f\| \leq \frac{1}{2}$$

$\dashrightarrow$ $\|P_j(\epsilon)^{-1}\| \leq 2$ pour ϵ assez petit

Estimations de convergence (suite)

on a

$$1 - \|P_j(\epsilon)f\| = \|P_j(0)f\| - \|P_j(\epsilon)f\| \leq \|(P_j(0) - P_j(\epsilon))f\| \leq \frac{1}{2}$$

$\dashrightarrow$ $\|P_j(\epsilon)^{-1}\| \leq 2$ pour ϵ assez petit $\Rightarrow$

$$|\mu_0 - \mu_j(\epsilon)|^m \leq c'.\epsilon^2|\mu_0 - \hat{\mu}(\epsilon)|. \qquad (2)$$

ce qui détermine la preuve du Lemme.

Estimations de convergence (suite)

$\Rightarrow$ La démonstration du théorème se termine une fois qu'on remarque que $\forall j = 1, \cdots, m$,

$$|\mu_0 - \mu_j(\epsilon)| = |\frac{\lambda_j^2(\epsilon) - \lambda_0^2}{\lambda_j^2(\epsilon)\lambda_0^2}|$$

Estimations de convergence (suite)

$\Rrightarrow$ La démonstration du théorème se termine une fois qu'on remarque que $\forall j = 1, \cdots, m$,

$$|\mu_0 - \mu_j(\epsilon)| = |\frac{\lambda_j^2(\epsilon) - \lambda_0^2}{\lambda_j^2(\epsilon)\lambda_0^2}|$$

et que pour ϵ assez petit on a $|\lambda_j^2(\epsilon)\lambda_0^2| < \frac{3}{2}\lambda_0^4$.

Conclusion

$\hookrightarrow$ Eff icacité de la technique des équations intégrales.

Conclusion

- $\hookrightarrow$ Eff icacité de la technique des équations intégrales.
- $\hookrightarrow$ Déformation régulière du bord $\Rightarrow$ Perturbation analytique des éléments propres .

Conclusion

- $\hookrightarrow$ Eff icacité de la technique des équations intégrales.
- $\hookrightarrow$ Déformation régulière du bord $\Rightarrow$ Perturbation analytique des éléments propres .
- $\hookrightarrow$ Evaluations des estimations de convergence sur les fonctions et les valeurs propres dont les termes majorants dépendent de l'ordre de multiplicité m.

Conclusion

- Eff icacité de la technique des équations intégrales.
- Déformation régulière du bord $\Rightarrow$ Perturbation analytique des éléments propres .
- Evaluations des estimations de convergence sur les fonctions et les valeurs propres dont les termes majorants dépendent de l'ordre de multiplicité m.
- Etude, dans un prochain travail, de la relation entre la croissance de l'ordre de multiplicité m et entre la "vitesse" de convergence des éléments propre ainsi qu'une validation numérique possible.